Université Paris Diderot – Paris 7
Université Sorbonne Paris Cité

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Victoria Cantoral-Farfán

Points de torsion pour les variétés abéliennes de type III

dirigée par Marc Hindry

Soutenue le 5 Juillet 2017 devant le jury composé de :

M. Marc Hindry	Université Paris Diderot	directeur
M. Jean-François Mestre	Université Paris Diderot	examinateur
M. Pierre Parent	Université de Bordeaux	examinateur
M. Nicolas Ratazzi	Université Paris-Sud	examinateur
M^{me} Marusia Rebolledo	Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand 2	examinatrice

Au vu des rapports de :

M^{me} Anna Cadoret	École Polytechnique	rapporteure
M. Wojciech Gajda	Adam Mickiewicz University	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu –
Paris Rive Gauche (IMJ-PRG)
UP7D - Campus des Grands Moulins
Bâtiment Sophie Germain
Boite Courrier 7012
75 205 PARIS Cedex 13

Université Paris-Diderot
École Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre ED 386
Bâtiment Sophie Germain
Case courrier 7012
8 place Aurélie Nemours
75 205 PARIS Cedex 13

A mi familia, que son una fuente de inspiración
y motivación cada día.
A Emma, Humberto, Aurora y Antonio que son
mis raíces y mi orgullo.
À Mo qui est une source inmense d'inspiration et
de motivation.

Ihcuac tlahtolli ye miqui mochi in teoyotl,
cicitlaltin, tonatiuh ihuan metztli ; mochi in
tlacayotl, neyolnonotzaliztli ihuan
huelicamatiliztli, ayocmo neci inon tezcapan.
Ihcuac tlahtolli ye miqui, mochi tlamantli in

cemanahuac, teoatl, atoyatl, yolcame, cuauhtin
ihuan xihuitl ayocmo nemililoh, ayocmo
tenehualoh, tlachializtica ihuan caquiliztica
ayocmo nemih.

Inhuac tlahtolli ye miqui, cemihcac motzacuah
nohuian altepepan in tlanexillotl, in quixohuayan.
In ye tlamahuizolo occetica in mochi mani ihuan
yoli in tlalticpac.

Ihcuac tlahtolli ye miqui, itlazohticatlahtol,
imehualizeltemiliztli ihuan tetlazotlaliztli, ahzo
huehueh cuicatl, ahnozo tlahtolli, tlatlauhtiliztli,
amaca, in yuh ocatcah, hueliz occepa
quintenquixtiz.

Ihcuac tlahtolli ye miqui, occequintin ye omiqueh
ihuan miec huel miquizqueh. Tezcatl maniz
puztecqui, netzatzililiztli icehuallo cemihcac
necahualoh : totlacayo motolinia.

Miguel León-Portilla

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Marc Hindry. Notamment pour tout son soutient depuis mon mémoire de master, jusqu'à l'attente des rapports de mon manuscrit de thèse. Merci de m'avoir proposé ce joli sujet de thèse, si riche et si intéressant. J'ai toujours beaucoup apprécié de travailler avec toi. Merci d'avoir toujours gardé ta porte ouverte, et d'avoir su répondre patiemment à toutes mes questions. Merci aussi pour ta pédagogie ainsi que ton grand côté humain. Je te suis très reconnaissante pour tous tes conseils et ton partage de savoir.

Je voudrais aussi remercier les rapporteurs Anna Cadoret et Wojciech Gajda, je suis très honorée qu'ils aient accepté de rapporter ce manuscrit. Je les remercie pour leur lecture, leur commentaires et leur rapport détaillés et très encourageants. Je remercie Anna Cadoret pour toutes ces remarques et commentaires qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit. Également, je tiens à remercier Wojciech Gajda, tous ses travaux ont été d'une grande importance pour moi.

Par la même occasion je souhaite remercier les membres du jury. Jean-François Mestre pour avoir été mon tuteur tout au long de ma thèse. Pierre Parent, merci d'avoir accepté de faire le déplacement, et pour son cours "Géométrie d'Arakelov des courbes modulaires" à l'École jeunes chercheurs en théorie des nombres, dont il a su répondre à mes multiples questions. Nicolas Ratazzi, dont tous ses travaux ont été très importants pour moi. Marusia Rebolledo, merci d'avoir accepté de faire le déplacement, et pour son invitation au Séminaire et Groupe de travail en Théorie des Nombres, merci aussi pour tous tes conseils et nos discussions mathématiques.

Je remercie toute l'équipe administrative de l'IMJ-PRG ainsi que l'École Doctorale et le Conacyt qui m'ont permis de réaliser cette thèse sans aucune difficulté.

Je tiens également à remercier à mes soeurs et frères de thèse. Merci à Richard, pour sa relecture et ses commentaires pertinents de mon manuscrit. Merci à Sebastian, Julie, Benjamin et Chunhui. Merci également à Cecilia, j'ai énormément apprécié toutes nos discussions mathématiques et non mathématiques à Paris et à Barranquilla, j'espère que nos chemins se croiseront encore, merci pour tous tes conseils, t'es un grand exemple à suivre. Merci aussi à Fabien pour nos discussions mathématiques.

Je remercie également les grand mathématiciens que j'ai eu l'occasion de rencontrer tout

au long de ma thèse : Jesus S. pour avoir partager des nombreux moments ensemble, Diego I., Mattia C., Emiliano A., Margaret B., Emmanuel L., Ajay R., Hongjie Y. et Xiaohua A. pour nos super groupes de travail. Merci Esther E., Léa B., Marine R. et Sarah D. pour vous nombreuses relectures de ce manuscrit, un grand merci à Sarah pour les nombreux skype mathématiques et à Amina A. merci de m'avoir accueilli à Grenoble. Merci aussi à tou-te-s les doctorant-e-s de Paris 7, Fathi, Alexandre, Martin, Nicolas, Florent, Tony, Jie, Charlotte, Assia, Baptiste, Marco, Aurélien, Pooneh, Parisa, Charles, Omar, Kevin, David, Élie, Kevin, Alexandre, Reda, Ruben, Martin, Sacha, Antoine, Daniel, Rahman, Frank, Juan Pablo, Vinicius, Carlos, Theophile certainement j'en oublie quelques uns, j'en suis désolée.

Merci également aux gens dont j'ai eu le plaisir de collaborer avec, Sho Tanimoto, Erik Visse, Yunqing Tang, it was for me a great experience, and I learn a lot from you. Yunqing, I really apreciate all our discutions, it is a pleasure for me that you can be here today ! Je tiens aussi à remercie Eric Gaudron pour tous son soutien concernant cet article en collaboration, ainsi que pour toutes les lettres de recommandation cette dernière année. Merci aussi à Davide Lombardo, por son amitiés ainsi que toutes ses relectures et remarques pertinentes, c'était aussi très intéressant de collaborer avec toi et Sonny Arora, Aaron Landesman, et Jackson S. Morrow.

Merci également à David Agnès de m'avoir invité à donner un exposé à Besançon et merci à Elisa Lorenzo pour m'avoir également invité à donner un exposé à la session de théorie des nombres à la VCLAM à Barranquilla. Merci Elisa pour tes conseils et discussions mathématiques toujours très intéressante.

Je remercie également mes trois grandes amies qui m'ont accompagné depuis la Licence à Poitiers : Lucie, Monia et Marianne. Leur amitié a été d'un grand soutien tout au long de ces huit années !

Merci aussi à Fabien qui m'a donnée l'occasion d'enseigner à l'École Polytechnique Féminine, c'était une expérience très enrichissante pour moi, je ne l'oublierai jamais. Un très grand merci à Michèle qui m'a accompagné chaleureusement depuis mon arrivée à Paris, elle a su toujours me donner des très bon conseils et j'apprécie tous les discussions que l'on a partager.

Mes derniers remerciement vont vers ma famille ainsi que mon compagnon Mohamed. Je leurs suis immensément reconnaissant, merci pour leur soutient inconditionnel et tout son amour. Clairement cette thèse n'aurai pas vu le jour sans leur soutient.

Gracias papá y mamá, por todo el apoyo y el amor que me han dado. Gracias por la educación que me han otorgado y por dejar volar siempre mi creatividad (desde chiquita). Gracias por haber fomentado mi sed por el conocimiento y haber estado siempre a mi lado para responder a mis dudas. Gracias a mis hermanas Emilia y Alejandra, por haber sido mi ejemplo y mi guía. Gracias también a mi tía Aurora por haber venido a París y por haber estado a mi lado a lo largo de estos años. Gracias también a Nayeli, es un gran honor para mi que pueda compartir este momento conmigo. Gracias a David y a Cristian por haberme apoyado y amar a mis hermanas. Amanda, eres todo un modelo para mi, personalmente y matemáticamente, me has apoyado e inspirado mucho, gracias. Coral, me encanta compartir todo contigo, eres un gran apoyo para mi, gracias. Gracias a Chely, Lety, Luis, Enrique, Alma, Lalo, Beto por todos sus consejos y enseñanzas.

"Arriba Tecum valiente, no temais al enemigo, acordais que estás conmigo, que soy Huitzizin Zulum."

Résumé

Le théorème de Mordell-Weil affirme que, pour toute variété abélienne définie sur un corps de nombres, le groupe des points K-rationnels est de type fini. Plus exactement, ce groupe peut être vu comme le produit d'un groupe libre et d'un sous-groupe fini de points de torsion définis sur K.

Il est naturel de se demander si l'on peut obtenir une borne uniforme pour le cardinal du sous-groupe fini des points de torsion définis sur une extension finie de K, dépendant uniquement du degré de cette extension, lorsque la variété abélienne varie. Pour ce qui est des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres, Merel a prouvé en 1994 que l'on peut obtenir une borne uniforme en utilisant des méthodes développées par Mazur, Kenku-Momose et Kamienny.

Cependant, il est aussi naturel de se demander si l'on peut obtenir une borne de ce cardinal, qui dépend uniquement du degré de cette extension, lorsque l'extension varie et la variété abélienne est fixée. Concernant cette dernière question Hindry et Ratazzi ont énoncé plusieurs résultats concernant certaines classes de variétés abéliennes.

L'objectif de cette thèse, sera de présenter des nouveaux résultats dans cette direction. On se concentrera sur la classe de variétés abéliennes de type III pleinement de type Lefschetz, c'est-à-dire, telles que leur groupe de Mumford-Tate soit le groupe des similitudes orthogonales qui commutent avec les endomorphismes et telles qu'elles vérifient la conjecture de Mumford-Tate. On démontre des nouveaux résultats concernant la conjecture de Mumford-Tate. En particulier, on fournit une liste de variétés abéliennes dont on sait prouver qu'elles sont pleinement de type Lefschetz.

Mots-clés

Variétés abéliennes, représentations galoisiennes, conjecture de Mumford-Tate.

Abstract

Mordell-Weil's theorem states that, for an abelian variety defined over a number field K the group of K-rational points is finitely generated. More precisely, it can be seen as a product of a free group by a finite subgroup of torsion points over K.

One can wonder if we can get an uniform bound for the order of the subgroup of torsion points over a finite extension L over K, depending on the degree of this extension and the dimension of the abelian variety, when the abelian variety varies in a certain class. For elliptic curves defined over a number field K, Merel proved in 1994 that we can get a uniform bound using methods developed by Mazur, Kenku-Momose and Kamienny.

A complementary question would be to ask if we can get a bound for the order of the subgroup of torsion points over a finite extension L over K, depending on the degree of this extension and the dimension of the abelian variety, when L varies over all the finite extensions of K and the abelian variety is fixed. This question had been already answered by Hindry and Ratazzi for certain classes of abelian variety.

This thesis will focus on this last question and will extend the previous results. We are going to present some new results concerning the class of abelian variety of type III in Albert's classification and "fully of Lefschetz type" (*i.e.* whose Mumford-Tate group is the group of symplectic or orthogonal similitudes commuting with endomorphisms and which satisfy the Mumford-Tate conjecture). We also show some new results in the direction of the Mumford-Tate conjecture. Moreover, we present a list of abelian varieties which, we know, are fully of Lefschetz type.

Keywords

Abelian varieties, Galois representations, Mumford-Tate. conjecture.

Table des matières

Notations

Introduisons à présent quelques notation utilisées tout au long de cette thèse.

K un corps de nombres,
A une variété abélienne définie sur K,
$g = \dim A$,
$h = \dim_{\mathrm{rel}} A$, la dimension relative de A, voir définition 1.1.7,
$\phi : A \to A^{\vee}$ une polarisation de A de degré $\deg \phi$.

ℓ un nombre premier,
$\mathrm{T}_\ell(A) = \varprojlim_n \mathrm{A}[\ell^n]$, le module de Tate ℓ-adique,
$\mathrm{V}_\ell(A) = \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

$D = \mathrm{End}^\circ(A) = \mathrm{End}_{\bar{K}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,
$E = Z(D)$, le centre de l'algèbre D,
$[E : \mathbb{Q}] = e$,
$\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E.

$E_\ell = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$,
$\mathcal{O}_{E_\ell} = \mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$,
$\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda | \ell} \mathcal{O}_\lambda$,
$E_\ell = \prod_{\lambda | \ell} E_\lambda$.

$\mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda | \ell} \mathcal{T}_\lambda$,
$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathcal{O}_\lambda$,
$\mathrm{V}_\ell(A) = \prod_{\lambda | \ell} \mathcal{V}_\lambda$,
$\mathcal{V}_\lambda = \mathrm{V}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} E_\lambda$.

$H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$,
$G(H)$, le stabilisateur de H.

MT(A), le groupe de Mumford-Tate de A,
Hg(A), le groupe de Hodge de A.

Dans le cas où A est simple de type II ou III
$\mathcal{S} = \{\ell,\, \ell\,\text{ramifié dans } \mathcal{O}_E \text{ ou } \ell|\deg\phi \text{ ou } D \text{ est non décomposé en } \lambda|\ell\}$
Soit $\ell \notin \mathcal{S}$, alors il existe des sous-modules T_λ et des sous-espaces vectoriels V_λ tels que
$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda$,
$\mathcal{V}_\lambda = \mathrm{V}_\lambda \oplus \mathrm{V}_\lambda$.

Dans le cas où A est de type I, on a
$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda$,
$\mathcal{V}_\lambda = \mathrm{V}_\lambda$.

Introduction

Le théorème de Mordell-Weil affirme que, pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres K, le groupe des points K-rationnels est de type fini, c'est-à-dire,

$$A(K) = A(K)_{\text{tors}} \times \mathbb{Z}^r,$$

en particulier le groupe des points de torsion $A(K)_{\text{tors}}$ est un sous-groupe fini.

On s'intéresse alors au cardinal de ce groupe. Il y a naturellement deux approches pour cela :

1. La première approche connue sous le nom de "Conjecture de la Borne Uniforme" est la suivante : on voudrait savoir si l'on peut obtenir une borne uniforme pour $|A(L)_{\text{tors}}|$, dépendant uniquement du degré $[L : K]$, lorsque la variété abélienne A varie. Pour ce qui est des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres K, Merel a prouvé en 1994 que l'on peut obtenir une borne uniforme en utilisant des méthodes développés par Mazur en 1978, Kenku-Momose en 1988 et Kammienny en 1992. En 2012, Cadoret et Tamagawa ont prouvé qu'il existe une borne uniforme, pour la torsion ℓ-primaire, dans une famille de variétés abéliennes de dimension 1, [CaTa12].
2. La deuxième approche consiste à fixer la variété abélienne A et à se demander si l'on peut obtenir une borne de $|A(L)_{\text{tors}}|$ qui dépend uniquement du degré $[L : K]$, lorsque l'extension L/K varie. Un des premiers résultats dans cette direction est dû à Masser en 1986.

Dans le but d'obtenir une meilleur borne de $|A(L)_{\text{tors}}|$, lorsque l'extension finie L/K varie, Hindry et Ratazzi ont énoncé une suite de résultats concernant certaines classes de variétés abéliennes (voir [HiRa10], [HiRa12] et [HiRa16]).

Le corps de cette thèse présentera des nouveaux résultats qui étendent ceux de Hindry et Ratazzi. En effet, on présentera des nouveaux théorèmes concernant la classe des variétés abéliennes qui sont isogènes à un produit de variétés abéliennes simples de type I, II ou III (selon la classification d'Albert) et telles que chaque variété abélienne simple soit pleinement de type Lefschetz, c'est-à-dire, telles que la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée pour chaque variété abélienne et le groupe de Hodge est le plus grand possible pour une certaine structure de l'algèbre d'endomorphismes (voir définition 3.1.2 au chapitre 3).

Énonçons à présent quelques résultats déjà connus dans cette dernière direction. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, et soit L une extension finie de K. On voudrait pouvoir donner une borne supérieure du cardinal du groupe fini $A(L)_{\text{tors}}$. Masser a déjà établi une borne polynomiale en le degré du corps de nombres L, voir [Mas86] :

Théorème 0.0.1 (Masser '86). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et de dimension g. Il existe une constante c, qui ne dépend que de A et de $[K:\mathbb{Q}]$, telle que, pour toute extension finie L/K, on a*

$$|A(L)_{\text{tors}}| \leq c([L:\mathbb{Q}]\log[L:\mathbb{Q}])^g.$$

Hindry et Ratazzi ont ultérieurement obtenu un meilleur exposant que celui de Masser. Pour cela ils ont introduit les invariants $\gamma(A)$ et $\alpha(A)$ suivants :

Définition 0.0.1. *L'invariant $\gamma(A)$ est défini comme suit :*

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall L/K \,\text{finie},\ |A(L)_{\text{tors}}| \ll [L:K]^x\},$$

où la notation $\ll$ signifie qu'il existe une constante C_x (ne dépendant que de la variété abélienne A) telle que $|A(L)_{\text{tors}}| \leq C_x[L:K]^x$.

En particulier, $\gamma(A)$ est l'exposant optimal : c'est-à-dire, la valeur minimale telle que, pour tout ϵ positif, on ait pour toute extension finie L/K

$$|A(L)_{\text{tors}}| \ll [L:K]^{\gamma(A)+\epsilon}.$$

Soit ℓ un nombre premier, on voudrait également pouvoir borner le cardinal d'un sous-groupe quelconque de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. Pour cela, on introduit l'invariant $\alpha(A)$ suivant :

Définition 0.0.2. *L'invariant $\alpha(A)$, qui dépend du nombre premier ℓ, est défini comme suit :*

$$\alpha(A) = \sup\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty],\, [K(H):K] \gg |H|^x\},$$

où la notation $\ll$ signifie qu'il existe une constante C'_x (ne dépendant que de la variété abélienne A) telle que $[K(H):K] \geq C'_x|H|^x$.

En particulier, l'invariant $\alpha(A)$ est l'exposant optimal : c'est-à-dire, la valeur maximale telle que, pour tout ϵ positif, on ait pour tout sous-groupe fini $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

$$|H|^{\alpha(A)-\epsilon} \ll [K(H):K].$$

Plus explicitement $\gamma(A) = \frac{1}{\alpha(A)}$, ainsi on a l'équivalence suivante pour tout ϵ positif :

$$|H|^{\alpha(A)-\epsilon} \ll [K(H):K] \quad \Longleftrightarrow \quad |H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)+\epsilon}.$$

Cette dernière équivalence nous permet de déterminer l'invariant $\gamma(A)$ en fonction des sous-groupes de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty],\, |H| \ll [K(H):K]^x\}.$$

Un corollaire du théorème 0.0.1 de Masser est le suivant :

Corollaire 0.0.1 (Masser '86). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K de dimension g. Soit P un point de torsion d'ordre m, il existe une constante c telle que pour tout $\epsilon > 0$ on a :*

$$m^{\frac{1}{g}-\epsilon} \ll [K(P):K].$$

Citons à présent quelques résultats concernant l'invariant $\gamma(A)$. Une reformulation du théorème de Masser, cité plus haut, est la suivante :

Théorème 0.0.2 (Masser '86). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et de dimension g. Alors*

$$\gamma(A) \leq g.$$

Remarque. La borne donnée par Masser n'est optimale que dans le cas des courbes elliptiques de type CM.

Afin de fournir une borne optimale, Ratazzi a donné une minoration en fonction du groupe de Mumford–Tate de la variété abélienne A noté MT(A). Rappelons que le groupe de Mumford–Tate MT(A) est un sous-groupe algèbrique de $\mathrm{H}^1_B(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, plus de détails concernant ce groupe ainsi qu'un définition formelle seront donnés au chapitre 1. Rappelons que le groupe de Mumford–Tate et le groupe de Hodge sont reliés par la relation suivante :

$$\mathrm{MT(A)} = \mathbb{G}_m \cdot \mathrm{Hg(A)},$$

où le groupe $\mathbb{G}_m$ est le tore des homothéties et ce dernier produit n'est pas un produit direct.

Théorème 0.0.3. *([Rat07, Théorème 1.4]) Soit A une variété abélienne simple, alors*

$$\frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}} \leq \gamma(A).$$

En particulier dans ce même article, Ratazzi donne, dans le cas des variétés abéliennes de type CM, une formule exacte pour l'exposant $\gamma(A)$ en fonction des caractères du groupe de Mumford-Tate MT(A) (voir [Rat07, Théorème 1.10]).

Quelques mois plus tard, Hindry et Ratazzi se sont intéressés au cas des variétés abéliennes isogènes à un produit de courbes elliptiques : ils ont également donné une formule exacte pour l'invariant $\gamma(A)$ (voir [HiRa10, Théorème 1.6]).

En 2010, les mêmes auteurs ont donné une formule explicite pour l'invariant $\gamma(A)$ dans le cas où la variété abélienne A est isogène à un produit de variétés abéliennes simples de type GSp, c'est-à-dire, des variétés abéliennes simples dont le groupe de Mumford-Tate est isogène au groupe des similitudes symplectiques et qui vérifient la conjecture de Mumford-Tate (voir [HiRa12, Théorème 1.6]). Un état de l'art concernant la conjecture de Mumford-Tate sera fait à la fin du chapitre 1.

Dans ce dernier article, Hindry et Ratazzi ont conjecturé l'énoncé général suivant :

Conjecture 0.0.1. *([HiRa12, Conjecture 1.1]) Soit A une variété abélienne isogène à un produit de variétés abéliennes $\prod_{i=1}^d A_i^{n_i}$ où les A_i sont simples et non isogènes 2 à 2. Alors*

$$\gamma(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,n\}} \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{\dim \mathrm{MT(A)}}.$$

Cette dernière conjecture a été vérifiée dans le cas des variétés abéliennes de type I et II pleinement de type Lefschetz, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 0.0.4. *([HiRa16, Théorème 1.6])*

Soit A une variété abélienne géométriquement simple de type I ou II définie sur un corps de nombres, dont le centre de l'algèbre d'endomorphismes est un corps de nombres totalement réel E de degré $e = [E : \mathbb{Q}]$. Soit $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$, posons $d := \sqrt{[\mathrm{End}^\circ(A) : E]}$. On suppose que A est pleinement de type Lefschetz ; on a alors

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1 + 2eh^2 + he} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}}.$$

L'entier h introduit dans le théorème précédent est la dimension relative de la variété abélienne A, définie comme suit :

Définition 0.0.3. *Soit A une variété abélienne de dimension g, on définit la **dimension relative** comme étant l'entier :*

$$h := \dim_{\mathrm{rel}} X = \begin{cases} \dfrac{g}{e} & \text{type I} \\ \dfrac{g}{2e} & \text{type II et III} \\ \dfrac{g}{d^2 e_0} & \text{type IV} \end{cases}$$

où $E = Z(\mathrm{End}^\circ(A))$, $e = [E : \mathbb{Q}]$, $d^2 = [\mathrm{End}^\circ(A) : E]$ et $e_0 = [E_0 : \mathbb{Q}]$ (voir chapitre 1).

Un théorème analogue à ce dernier, concernant les variétés abéliennes isogènes à un produit de variétés abéliennes de type I ou II, a aussi été démontré par Hindry et Ratazzi (voir [HiRa16, Théorème 1.14]).

Les résultats de ma thèse font suite au théorème 0.0.4 qui n'a pas encore été écrit. Plus particulièrement, dans le chapitre 4 on prouve la conjecture 0.0.1 dans le cas des variétés abéliennes de type III pleinement de type Lefschetz.

Récemment, Zywina a prouvé cette conjecture dans le cas où la variété abélienne vérifie la conjecture de Mumford-Tate (voir [Zyw17, Theorem 1.1]). Ce résultat, prouvé indépendamment, est plus général. Remarquons cependant que notre méthode est plus précise notamment, elle donne des renseignements sur la dimension des stabilisateurs. De même, cette technique nous permet de déterminer une minoration du degré de l'extension engendrée par un point de torsion, voir théorème 0.0.6. Finalement, si Galois est explicite, c'est-à-dire, $\max(\mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : \rho_\ell(G_K))$ est effectif, alors tout est effectif et explicite.

Dans le chapitre 4, on fournit la preuve du théorème suivant qui déterminent l'invariant $\gamma(A)$ lorsque A est isogène à un produit de variétés abéliennes simples de type I, II ou III et pleinement de type Lefschetz [théorème 0.0.5]. En effet, on exclut le cas de type IV qui sera traité ultérieurement.

Théorème 0.0.5. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^d A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$. De plus on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type I, II ou III, pleinement de type Lefschetz et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux. Pour tout sous ensemble non vide $I \subset \{1, ..., d\}$ on note $A_I := \prod_{i\in I} A_i$. On note $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$ où $E_i = Z(\mathrm{End}^\circ(A_i))$, $h_i = \dim_{\mathrm{rel}} A_i$. On pose également*

$$d_i = \begin{cases} 1 \text{ si } A_i \text{ de type I,} \\ 2 \text{ si } A_i \text{ de type II ou III,} \end{cases} \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 \text{ si } A_i \text{ de type I ou II,} \\ -1 \text{ si } A_i \text{ de type III.} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\gamma(A) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i\in I} e_i(2h_i^2 + \eta_i h_i)} \right\} = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\}.$$

Remarque. La preuve du théorème 0.0.5 fournit une valeur explicite de l'invariant $\gamma(A)$, a posteriori on constante que cette valeur correspond au terme de droite de l'égalité

Ordre d'un point de torsion et degré de l'extension qu'il engendre La stratégie de notre preuve fournit un corollaire concernant le degré de l'extension engendrée par un point de torsion. Une preuve détaillée est fournie à la fin du chapitre 4.

Théorème 0.0.6. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, géométriquement simple de type III, de dimension relative h et pleinement de type Lefschetz. Il existe une constante $c_1 := c_1(A, K) > 0$ telle que, pour tout point de torsion P d'ordre m dans $A(\bar{K})$, on a la minoration suivante :*

$$[K(P) : K] \geq c_1^{\omega(m)} m^{2h},$$

où l'entier $\omega(m)$ est le nombre de diviseurs premiers distincts de m.

Nouveaux cas de la conjecture de Mumford-Tate Une des hypothèses principales du théorème 0.0.5 est le fait que la variété A doit être pleinement de type Lefschetz : en particulier, elle doit vérifier la conjecture de Mumford-Tate. Dans ce sens, les deux théorèmes suivant fournissent des exemples de variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz.

Le théorème suivant donne une correction d'un point subtil du [BGK10, Theorem 5.11] :

Théorème 0.0.7. *Soit A une variété abélienne simple de dimension g et de type III selon la classification d'Albert. On suppose que*

1. *la dimension relative $h \in \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ avec $g = 2eh$ et $e = [E : \mathbb{Q}]$ où E et le centre de l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathrm{End}_{\bar{K}}(A) \otimes \mathbb{Q}$.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz.

Ce théorème est énoncé dans [BGK10] avec l'hypothèse h impair, mais il semble qu'il faille aussi exclure les valeurs de la forme $\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}$ avec $m \in \mathbb{N}$. L'erreur dans [BGK10] a d'abord été observé par Davide Lombardo, on renvoie le lecteur à [Lom15a].

Considérons l'ensemble suivant où l'entier s est supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned}\Sigma' := &\{2^{(4k+3)s-1},\, k \geq 0\} \bigcup \{2^{4ks-1},\, k \geq 1\} \\ &\bigcup \{\frac{1}{2}(\binom{4k+4}{2k+2})^s,\, k \geq 0\} \bigcup \{2^{2s(4k+1)-1},\, k \geq 1\} \\ &\bigcup \{2^{2s-1}k^{2s},\, k \geq 2\} \bigcup \{\frac{1}{2}(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s},\, k \geq 0\}.\end{aligned}$$

On peut ainsi énoncer le théorème suivant qui généralise les résultats de [Pin98] :

Théorème 0.0.8. *Soit A une variété abélienne simple de type III telle que le centre de $\mathrm{End}^\circ(A)$ soit égal à $\mathbb{Q}$. Supposons que la dimension relative h n'appartient pas à l'ensemble Σ'. Alors, la variété abélienne est pleinement de type Lefschetz. En particulier, A vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

Grâce aux deux théorèmes précédents et à des résultats de Ichikawa et de Lombardo (voir théorème 4.2.1 au chapitre 4) on démontre que un produit de variétés abéliennes simples de type I, II ou III pleinement de type Lefschetz est aussi pleinement de type

Lefschetz. On peut énoncer les corollaires suivants qui donnent une estimation plus précise sur la dimension relative :

Corollaire 0.0.2. *Soit E un corps de nombres totalement réel de degré $e = [E : \mathbb{Q}]$. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres, telle que A est géométriquement simple de type III et le centre de son algèbre d'endomorphismes est E. On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *La dimension relative h appartient à l'ensemble $\{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$.*
2. *On a $e = 1$ et la dimension relative h n'appartient pas au sous-ensemble Σ'.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz et en particulier

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1 + e(2h^2 - h)} = \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{Hg(A)} + 1}.$$

Remarque. Dans le premier cas du corollaire précédent on est en train d'exclure les entiers h impairs suivants : 3, 35, 6435 (lorsque $h \leq 10^6$). Dans le cas où A est une variété abélienne simple de type III telle que $E = \mathbb{Q}$ le corollaire précédent exclut les 21 valeurs possibles pour $g = 2h \leq 10^3$ suivantes :

$$\Sigma'_{\leq 10^3} = \{4, 6, 8, 16, 36, 64, 70, 100, 128, 144, 196, 216, 256, 324, 400, 484, 512, 576, 676, 784, 900\}.$$

Lorsque $g \leq 10^6$ l'ensemble Σ' est de cardinal 513.

On peut étendre ce résultat au cas d'une variété abélienne géométriquement isogène à un produit de variétés abéliennes de type I, II ou III.

Corollaire 0.0.3. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$. De plus on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type I, II ou III et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux. On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *Les dimensions relatives h_i est impair ou égale à 2 lorsque la variété abélienne A_i est de type I ou II et $h_i \notin \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ lorsque A_i est de type III.*
2. *On a $e_i = 1$ (i.e. $E_i = \mathbb{Q}$) et h_i n'appartient pas au sous-ensemble Σ lorsque A_i de type I ou II et h_i n'appartient pas au sous-ensemble Σ' lorsque A_i est de type III.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz et en particulier, avec les notations du théorème 4.2.3, on a :

$$\gamma(A) = \max_{I} \left\{ \frac{2\sum_{i \in I} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i \in I} e_i (2h_i^2 + \eta_i h_i)} \right\} = \max_{I} \left\{ \frac{2\sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\}.$$

Remarque. L'ensemble Σ est défini comme suit :

$$\Sigma := \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, \exists a \geq 1, g = 2^{k-1} a^k \right\} \bigcup \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, 2g = \binom{2k}{k} \right\}.$$

Présentons à présent une stratégie de la preuve du théorème 0.0.5. Revenons à présent à la définition de l'invariant $\gamma(A)$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall L/K\text{finie}, \, |A(L)_{\text{tors}}| \ll [L:K]^x\}.$$

Un des résultats crucial est le critère d'indépendance de Serre, on renvoie le lecteur au théorème 3.1.2. Ce dernier critère nous permet de focaliser notre attention sur les sous-groupes finis de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$ pour tout nombre premier ℓ. En effet, pour toute extension finie L de K on a la proposition suivante :

Proposition 0.0.1. *Pour tout sous-groupe $H_{tors} \subset A(L)_{tors}$ tel que $H_{tors} = \prod_\ell H_\ell$ on a*

$$[K(H_{tors}) : K] \gg\ll \prod_\ell [K(H_\ell) : K].$$

Ce dernier résultat d'indépendance des représentation ℓ-adiques nous permet de nous ramener au cas des sous-groupes finis H de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. On peut ainsi travailler avec la définition suivante de l'invariant $\gamma(A)$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty], \, |H| \ll [K(H):K]^x\}.$$

De cette définition, on déduit pour tout sous-groupe fini $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ l'équivalence suivante :

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H):K]}.$$

On remarque que la valeur de $\gamma(A)$ est essentiellement déterminée par le cardinal du sous-groupe H et le degré de l'extension $K(H)$ sur K. Ainsi, la preuve se divise naturellement en deux étapes : dans un premier temps on détermine ces deux quantités et ensuite, grâce à des méthodes combinatoires, on obtient l'invariant $\gamma(A)$.

Le cardinal du sous-groupe fini H se détermine sans difficultés particulières. Cependant, le degré de l'extension $K(H)$ sur K est plus difficile à déterminer. On peut pour cela supposer que H est un $\mathrm{End}(A)$-module, en effet, si $\tilde{H} = \mathrm{End}(A) \cdot H$ alors $K(H) = K(\tilde{H})$. Dans le chapitre 3 on développe la théorie des représentations galoisienne ℓ-adiques qui nous permet de décomposer ce degré de la façon suivante :

$$[K(H):K] = (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H),$$

où $\delta(H)$ mesure en un sens à quel point l'extension $K(H)$ contient l'image de l'accouplement de Weil (voir section 3.2) et $G(H)$ est le stabilisateur du sous-groupe H dans $\mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)$ (voir section 2.1).

L'étape suivante est donc d'expliciter chaque terme. Grâce à la propriété dite "propriété

μ" (voir section 3.2) on détermine d'abord la valeur de $\delta(H)$. En utilisant les lemmes de comptages, développés dans le chapitre 2, on estime ensuite l'indice du stabilisateur $G(H)$ dans $\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)$.

La deuxième étape de la preuve utilise des méthodes combinatoires pour déterminer l'invariant $\gamma(A)$, comme par exemple le [HiRa16, Lemme 2.7].

Afin d'adapter les méthodes développées dans [HiRa16] concernant les variétés de type I et II, on a dû surmonter quelques difficultés, notamment l'étude approfondie du stabilisateur $G(H)$ pour tout sous-groupe fini $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ ainsi que le calcul explicite de la codimension des différents groupes qui interviennent dans la définition du stabilisateur, ceci est à l'origine du théorème 2.1.7. De même, on a dû travailler sur l'uniformité de l'estimation $\#G_W(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \asymp \ell^{n \dim G_W}$, où W est un $\mathbb{Q}_\ell$-sous espace vectoriel de $\mathrm{V}_\ell(A)$. En effet, cette estimation était beaucoup plus simple dans [HiRa16], dans le sens où le groupe G_W était lisse sur $\mathbb{Z}_\ell$. Dans le cas d'une variété abélienne de type III, on sait, grâce à Lombardo (voir [Lom15b]) que pour tout nombre premier $\ell \geq \ell_0$ on a la lissité. Cependant on a dû donner une bonne estimation dans le cas où $\ell < \ell_0$. Dans cette estimation, les constantes qui interviennent ont le droit de dépendre éventuellement du nombre premier ℓ. Ce dernier résultat est à l'origine du lemme 2.1.7. Finalement, une des dernières difficultés à surmonter était le calcul combinatoire qui bien évidement était différent à celui développé dans [HiRa16].

Dans le premier chapitre, on introduit certains préliminaires assez généraux, ainsi qu'une brève description des conjectures de Hodge, Tate et Mumford-Tate pour les variétés abéliennes. On étudie ensuite en détail la structure du stabilisateur $G(H)$ pour tout sous-groupe H de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. On détermine dans le théorème 2.1.7 la codimension de ces stabilisateurs pour toute variété abélienne de type I, II ou III. Grâce au calcul préalable de cette codimension, on établit dans le lemme 2.1.7 une estimation de l'indice $(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$ pour tout nombre premier ℓ. Tout au long du chapitre 3, on développe la théorie des représentations ℓ-adiques et, plus particulièrement, on explique en détail la propriété dite "propriété μ". Dans le chapitre 4, on fournit la preuve du théorème [0.0.5]. En effet, on détermine l'invariant $\gamma(A)$ lorsque A est une variété abélienne simple de type III et pleinement de type Lefschetz et ensuite lorsque A est isogène à un produit de variétés abéliennes simples de type III et pleinement de type Lefschetz théorème. Ces deux étapes nous permettent de prouver le théorème 0.0.5. À la fin du chapitre 4, on énonce le théorème 0.0.6 concernant l'ordre d'un point de torsion et le degré de l'extension qu'il engendre. Ce dernier résultat est une conséquence de la preuve du théorème 0.0.5. Enfin, en utilisant des résultats de Noot, Shimura, Banaszak, Gajda, Krasoń, et Pink, on démontre des nouveaux cas où la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée, et plus particulièrement, on établit dans le chapitre 5 une liste des variétés abéliennes dont on sait prouver qu'elles sont pleinement de type Lefschetz, voir théorèmes 0.0.7 et 0.0.8 et corollaires 0.0.2 et 0.0.3.

Introduction (English version)

Mordell-Weil theorem states that, for every abelian variety A defined over a number field K, the group of K-rational points is finitely generated, more precisely,

$$A(K) = A(K)_{\text{tors}} \times \mathbb{Z}^r,$$

where the group of torsion points $A(K)_{\text{tors}}$ is finite.

We are particularly interested in the order of this group. There are two approaches to do so :

1. The first approach, known as the "uniform boundedness conjecture" is the following : we would like to know if one can get a uniform bound for $|A(L)_{\text{tors}}|$, which only depends on the degree $[L : K]$, when the abelian variety A varies. Merel proved, in 1994, that one can obtain uniform bounds for elliptic curves defined over a number field. He proved this results using some methods developed by Mazur in 1978, Kenku-Momose in 1988 and Kammienny in 1992. In 2012, Cadoret and Tamagawa proved that a uniform bound, of the ℓ-primary torsion, exists in a one-dimensional family, [CaTa12].

2. The second approach is obtained by fixing the abelian variety A and wonder if one can get uniform bounds of $|A(L)_{\text{tors}}|$ which only depends on the degree $[L : K]$ when the finite extension L/K varies. One of the first results known in this direction is due to Masser in 1986.

Hindry and Ratazzi have given several results in this last direction concerning some classes of abelian varieties (see [HiRa10], [HiRa12] and [HiRa16]).

The main of this thesis is to present some new results which generalize the previous results of Hindry and Ratazzi. We present new results concerning the class of abelian varieties which are isogenous to a product of simple abelian varieties of type I, II or III (in the sense of Albert's classification) and such that each simple abelian variety is fully of Lefschetz type. This means that Mumford-Tate conjecture holds for each abelian variety and the Hodge group is the biggest possible given a certain structure of the endomorphism ring (see definition 3.1.2 chapter 3).

We are going to present some known results in this last direction. Let A be an abelian variety defined over a number field K and let L be a finite extension of K. We would like to give an upper bound of the order of the finite group $A(L)_{\text{tors}}$. Masser had already establish an upper bound which is polynomial on the degree of the number field L, see [Mas86] :

Theorem 0.0.1 (Masser '86)**.** *Let A be an abelian variety defined over a number field K of dimension g. There exists a constant c, which depends on A and on $[K : \mathbb{Q}]$, such that, for every finite extension L/K, one has*

$$|A(L)_{\text{tors}}| \leq c([L : \mathbb{Q}] \log[L : \mathbb{Q}])^g.$$

Later Hindry and Ratazzi gave a better exponent than Masser. To do so, they defined the following invariants $\gamma(A)$ and $\alpha(A)$:

Definition 0.0.1. *The invariant $\gamma(A)$ is defined as follows :*

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall L/K \text{ finite}, \ |A(L)_{\text{tors}}| \ll [L : K]^x\},$$

where the notation $\ll$ means that there exists a constant C_x (which only depends on the abelian variety A) such that $|A(L)_{\text{tors}}| \leq C_x[L : K]^x$.

More precisely $\gamma(A)$ is the optimal exponent : that means that it is the minimal value such that, for every positive ϵ, one has, for every finite extension L/K

$$|A(L)_{\text{tors}}| \ll [L : K]^{\gamma(A)+\epsilon}.$$

Let ℓ be a prime number, we would like to give a bound of the order of any subgroup of A$[\ell^\infty]$. To do so, we introduce the following invariant $\alpha(A)$:

Definition 0.0.2. *The invariant $\alpha(A)$, which depends on the prime number ℓ, is defined as follows :*

$$\alpha(A) = \sup\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty], \, [K(H) : K] \gg |H|^x\},$$

where the notation $\ll$ means that there exists a constant C'_x (which only depends on the abelian variety A) such that $[K(H) : K] \geq C'_x|H|^x$.

More precisely $\alpha(A)$ is the optimal exponent : that means that it is the maximal value such that, for every positive ϵ, one has, for every finite subgroup $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

$$|H|^{\alpha(A)-\epsilon} \ll [K(H) : K].$$

In particular one has $\gamma(A) = \frac{1}{\alpha(A)}$, and therefore we have the following equivalence for every positive ϵ and every finite subgroup $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$:

$$|H|^{\alpha(A)-\epsilon} \ll [K(H):K] \quad \Longleftrightarrow \quad |H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)+\epsilon}.$$

This last equivalence allows us to determine the invariant $\gamma(A)$ in therms of the finite subgroups of $\mathrm{A}[\ell^\infty]$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty],\, |H| \ll [K(H):K]^x\}.$$

One can state the following corollary that is a consequence of theorem 0.0.1 :

Corollary 0.0.1 (Masser '86). *Let A be an abelian variety defined over a number field K of dimension g. Let P be a torsion point of order m, there exists a constant c such that, for every $\epsilon > 0$, one has :*

$$m^{\frac{1}{g}-\epsilon} \ll [K(P):K].$$

Let us state some results concerning the invariant $\gamma(A)$. One can reformulate Masser theorem, quoted above, in terms of the invariant $\gamma(A)$ in the following way :

Theorem 0.0.2 (Masser '86)**.** *Let A be an abelian variety defined over a number field K of dimension g. Then*

$$\gamma(A) \leq g.$$

Remark *Masser's bound is not an optimal bound, except in the case of CM elliptic curves.*

In order to present an optimal bound, Ratazzi gave the following lower bound which depends on the Mumford–Tate group of the abelian variety A denoted by MT(A). Let us recall that the Mumford–Tate groupe MT(A) is an algebraic subgroup of $\mathrm{H}^1_B(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, a precise definition of this group can be found on chapter 1. Let us recall that the Mumford–Tate group and the Hodge group are related by the following relation :

$$\mathrm{MT(A)} = \mathbb{G}_m \cdot \mathrm{Hg(A)},$$

where the group $\mathbb{G}_m$ is the homotheties torus and this last product is not a direct product.
Theorem 0.0.3. ([Rat07, Théorème 1.4])*Let A be a simple abelian variety, then*

$$\frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}} \leq \gamma(A).$$

In particular in the same paper, Ratazzi gave, in the case of abelian varieties of CM type, an explicit formula for the invariant $\gamma(A)$ in terms of the characters of the Mumford-Tate group MT(A) (see [Rat07, Théorème 1.10]).

Few months later, Hindry and Ratazzi focused their attention to abelian varieties which are isogenous to a product of elliptic curves : they equally establish an explicit formula for the invariant $\gamma(A)$ (see [HiRa10, Théorème 1.6]).

In 2010, the same authors gave an explict formula of the invariant $\gamma(A)$ in the case where the abelian variety A is isogenous to a product of simple abelian varieties of type GSp, that means that they are simple abelian varieties such that the Mumford-Tate group is isogenous to the group of symplectic similitudes and such that Mumford-Tate conjecture holds for these varieties (see [HiRa12, Théorème 1.6]). A state of the art concerning the Mumford-Tate conjecture is presented at the end of chapter 1.

In this last paper, Hindry and Ratazzi stated the following conjecture :

Conjecture 0.0.1. ([HiRa12, Conjecture 1.1])*Let A be an abelian variety isogenous to a product of abelian varieties $\prod_{i=1}^{d} A_i^{n_i}$ where the A_i are simple abelian varieties no pairwise isogenous. Then*

$$\gamma(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{\dim \mathrm{MT(A)}}.$$

This last conjecture holds for abelian varieties of type I and II which are fully of Lefschetz type :

Theorem 0.0.4. ([HiRa16, Théorème 1.6])

Let A be a simple abelian variety of type I or II defined over a number field, such that the center of the endomorphism algebra is a totally real number field E of degree $e = [E : \mathbb{Q}]$. Let $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$, and denote $d := \sqrt{[\mathrm{End}^\circ(A) : E]}$. Assume that A is fully of Lefschetz type ; then one has

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1 + 2eh^2 + he} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}}.$$

The integer h introduced below is the relative dimension of the abelian variety A defined as follows :

Definition 0.0.3. *Let A be an abelian variety of dimension g, we define the* ***relative***

dimension *as follow :*

$$h := \dim_{\mathrm{rel}} X = \begin{cases} \dfrac{g}{e} & \textit{type I} \\ \dfrac{g}{2e} & \textit{type II and III} \\ \dfrac{g}{d^2 e_0} & \textit{type IV.} \end{cases}$$

where $E = Z(\mathrm{End}^\circ(A))$, $e = [E : \mathbb{Q}]$, $d^2 = [\mathrm{End}^\circ(A) : E]$ *and* $e_0 = [E_0 : \mathbb{Q}]$ *(see chapter 1).*

Hindry and Ratazzi proved an analogous theorem concerning abelian varieties which are isogenous to a product of abelian varieties of type I or II (see [HiRa16, Théorème 1.14]).

The first new results of this thesis are in the spirit of theorem 0.0.4. More precisely, in chapter 4 we prove conjecture 1 in the case of abelian varieties of type III which are fully of Lefschetz type.

Recently, Zywina proved this last conjecture in the case of abelian varieties which verify Mumford-Tate conjecture (see [Zyw17, Theorem 1.1]). This result, proved independently, is more general. Nevertheless let us remark that our method is more precise, in the sense that we give more information about the dimension of the stabilizers. Moreover, our method allows us to obtain a lower bound for the degree of the field extension generated by a torsion point, see theorem 0.0.6. Finally, if Galois is explicit, that is, $\max(\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : \rho_\ell(G_K))$ is effective, then everything is effective and explicit.

In chapter 4, we present the proof of the following theorem which give an explicit determination of the invariant $\gamma(A)$ in the case where A is isogenous to a product of simple abelian varieties of type I, II or III and fully of Lefschetz type [theorem 0.0.5]. Actually, we are excluding the case of type IV which will be treated ulteriorly.

Theorem 0.0.5. *Let A be an abelian variety defined over a number field K isogenous over $\overline{K}$ to $\prod_{i=i}^d A_i^{n_i}$. For every $i \in [\![1, d]\!]$ we have $n_i \geq 1$ and we denote $g_i = \dim A_i$. We suppose that the abelian varieties A_i are simple, of type I, II or III, fully of Lefschetz type and pairwise non isogenous over $\overline{K}$.*

For every non empty subset $I \subset \{1, ..., d\}$ we denote $A_I := \prod_{i \in I} A_i$. Moreover we define $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$ where $E_i = Z(\mathrm{End}^\circ(A_i))$, $h_i = \dim_{\mathrm{rel}} A_i$ and

$$d_i = \begin{cases} 1 \textit{ if } A_i \textit{ is of type I,} \\ 2 \textit{ if } A_i \textit{ is of type II or III,} \end{cases} \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 \textit{ if } A_i \textit{ is of type I or II,} \\ -1 \textit{ if } A_i \textit{ is of type III.} \end{cases}$$

Then one has :

$$\gamma(A) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i \in I} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i \in I} e_i (2h_i^2 + \eta_i h_i)} \right\} = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\}.$$

Remark. The proof of theorem 0.0.5 gives a explicit value of the invariant $\gamma(A)$, then we notice that this value actually correspond to the right hand side of the equality.

Order of a torsion point and degree of the extension generated by this point As a consequence of the proof of the previous theorems one can state the following result concerning the degree of the extension generated by a torsion point. At the end of chapter 4 we give a detailed proof.

Theorem 0.0.6. *Let A be an abelian variety defined over a number field K, simple of type III, relative dimension h and fully of Lefschetz type. There exists a constant $c_1 := c_1(A, K) > 0$ such that, for every torsion point P of order m in $A(\bar{K})$, one has :*

$$[K(P) : K] \geq c_1^{\omega(m)} m^{2h},$$

where $\omega(m)$ denotes the number of distinct prime divisors of m.

New cases of the Mumford-Tate conjecture Let us remark that one of the main hypothesis of theorem 0.0.5 is that the abelian variety A must be fully of Lefschetz type, in particular, Mumford-Tate conjecture must hold for A. In this direction the following two theorems give examples of abelian varieties that are fully of Lefschetz type.

The following theorem gives a correction of a subtle point of [BGK10, Theorem 5.11] :

Theorem 0.0.7. *Let A be a simple abelian variety of dimensiong of type III in the sense of Albert's classification. Assume that*

1. *the relative dimension $h \in \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ where $g = 2eh$ and $e = [E : \mathbb{Q}]$ where E in the center of the endomorphism algebra $D := \mathrm{End}^{\circ}(A) = \mathrm{End}_{\bar{K}}(A) \otimes \mathbb{Q}$.*

Then A is fully of Lefschetz type.

This theorem is state in [BGK10] with the hypothesis h odd, nevertheless, it seems to be important to exclude the values of the form $\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}$ with $m \in \mathbb{N}$. The error in [BGK10] was first observed by Davide Lombardo, we refer the reader to [Lom15a].

Let us consider the following set where s is an integer greater than 1 :

$$\begin{aligned}\Sigma' :=&\{2^{(4k+3)s-1},\ k\geq 0\}\bigcup\{2^{4ks-1},\ k\geq 1\}\\ &\bigcup\{\frac{1}{2}(\binom{4k+4}{2k+2})^{s},\ k\geq 0\}\bigcup\{2^{2s(4k+1)-1},\ k\geq 1\}\\ &\bigcup\{2^{2s-1}k^{2s},\ k\geq 2\}\bigcup\{\frac{1}{2}(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s},\ k\geq 0\}.\end{aligned}$$

Therefore we can state the following theorem which generalize results of [Pin98] :

Theorem 0.0.8. *Let A be a simple abelian variety such that the center of $\mathrm{End}^\circ(A)$ is $\mathbb{Q}$. Assume that the relative dimension h is not in the set Σ' then, the abelian variety is fully of Lefschetz type. More precisely, Mumford-Tate conjecture holds for the abelian variety A.*

Using the previous two results and some results of Ichikawa and Lombardo (see theorem 4.2.1 chapter 4) one can prove that the product of simple abelian varieties of type I, II or III that are fully of Lefschetz type is also of Lefschetz type. We can state the following two corollaries which give a more precise estimation on the relative dimension :

Corollary 0.0.2. *Let E be a totally real number field of degree $e = [E : \mathbb{Q}]$. Let A be an abelian variety defined over a number field such that A is simple of type III and the center of endomorphisms algebra is E. Assume that one of the following hypothesis hold :*

1. *The relative dimension h is in the set $\{2k+1, k\in\mathbb{N}\}\setminus\{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m\in\mathbb{N}\}$.*
2. *We have $e = 1$ and the relative dimension h is not in Σ'.*

Then A if fully of Lefschetz type. In particular one has

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1+e(2h^2-h)} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{Hg(A)}+1}.$$

Remarque. In the first point of the previous corollary we are excluding the following odd integers h : 3, 35, 6435 (when $h \leq 10^6$). In the second case, when the abelian variety is simple of type III such that $E = \mathbb{Q}$ the previous corollary is excluding the following 21 possible values of $g = 2h \leq 10^3$:

$$\Sigma'_{\leq 10^3} = \{4, 6, 8, 16, 36, 64, 70, 100, 128, 144, 196, 216, 256, 324, 400, 484, 512, 576, 676, 784, 900\}.$$

When $g \leq 10^6$ the set Σ' has 513 elements.

We can therefore extend this last result to the case of an abelian variety isogenous to a product of abelian varieties of type I, II or III.

Corollary 0.0.3. *Let A be an abelian variety defined over a number field K isogenous over $\overline{K}$ to $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. For every $i \in [\![1,d]\!]$ we have $n_i \geq 1$ and we denote $\dim A_i = g_i$. We suppose that the abelian varieties A_i are simple, of type I, II or III and pairwise non isogenous over $\overline{K}$. Assume that one of the following hypothesis hold :*

1. *The relative dimensions h_i are even or equal to 2 when the abelian variety A_i is of type I or II and $h_i \notin \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ when A_i is of type III.*
2. *We have $e_i = 1$ (i.e. $E_i = \mathbb{Q}$) a h_i is not in the set Σ when A_i is of type I or II and h_i is not in the set Σ' when A_i is of type III.*

Then A if fully of Lefschetz type. In particular, with the notations of theorem 0.0.5 one has

$$\gamma(A) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i d_i e_i h_i}{1+\sum_{i\in I} e_i(2h_i^2+\eta_i h_i)} \right\} = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{1+\dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{A_i})} \right\}.$$

Remarque. The set Σ is defined as follow :

$$\Sigma := \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, \exists a \geq 1, g = 2^{k-1}a^k \right\} \bigcup \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, 2g = \binom{2k}{k} \right\}.$$

We are going to present a strategy of the proofs of the first of theorem 0.0.5. Let us recall the definition of the invariant $\gamma(A)$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall L/K \text{finite}, \, |A(L)_{\text{tors}}| \ll [L:K]^x\}.$$

One of the main results is the independence criterion of Serre, we refer the reader to theorem 3.1.2. This last criterion allows us to focus on the finite subgroups of $\mathrm{A}[\ell^\infty]$, for every prime number ℓ. Indeed, for every finite extension L over K we have the following proposition

Proposition 0.0.2. *For every subgroup $H_{tors} \subset A(L)_{tors}$ such that $H_{tors} = \prod_\ell H_\ell$ one has*

$$[K(H_{\text{tors}}):K] \gg\ll \prod_\ell [K(H_\ell):K].$$

This last result of the independence of ℓ-adic representations allows us to work with finite subgroups H of $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. One can therefore work with the following definition of the invariant $\gamma(A)$:

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty], \, |H| \ll [K(H):K]^x\}.$$

Following this last definition one can deduce that, for every finite subgroup H of $\mathrm{A}[\ell^\infty]$, we have this equivalence :

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H):K]}.$$

We notice that the value of $\gamma(A)$ is mainly determined by the order of the subgroup H and the degree of the extension $K(H)$ over K. Therefore, the proof can naturally be divided in two steps : firstly we explicitly determine this two values then, thanks to some combinatorial methods we obtain the invariant $\gamma(A)$.

The order of the finite subgroup H can be calculated without any particular difficulty. Nevertheless, the degree of the extension $K(H)$ over K is harder to establish. In order to do so we can suppose that H is a $\mathrm{End}(A)$-module, actually if $\tilde{H} = \mathrm{End}(A) \cdot H$ then $K(H) = K(\tilde{H})$. In chapter 3 we develop the theory of ℓ-adic Galois representations which allowed us to decompose the degree. Thanks to chapter 3 one can decompose the degree of the extension in the following way :

$$[K(H):K] = (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H),$$

where $\delta(H)$ measure in some way how much the extension $K(H)$ contains the image of the Weil pairing (see section 3.2) and $G(H)$ is the stabilizer of the subgroup H in $\mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)$ (see section 2.1). The next step is to give an explicit formula for each term. Thanks to the property known as "property μ" (see section 3.2) we can determine the value of $\delta(H)$. Using some lemmas, developed in chapter 2 one can estimate the index of the stabilizer $G(H)$ in $\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)$.

The second step consist in using some combinatorial methods to determine the invariant $\gamma(A)$, for example [HiRa16, Lemme 2.7].

In order to adapt the methods developed in [HiRa16], which concern abelian varieties of type I and II, we had to overcome some difficulties, in particular the in-depth study of the stabilizer $G(H)$ for every finite subgroup $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ as well as the explicit calculation of the codimension of several groups which intervene in the definition of the stabilizer, this is at the origin of the theorem 2.1.7. Also, we had to work on the uniformity of the estimation $\#G_W(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \asymp \ell^{n \dim G_W}$, where W is a $\mathbb{Q}_\ell$-vector subspace of $\mathrm{V}_\ell(A)$. Indeed, this estimation was much simpler in [HiRa16], in the sense that the group G_W was smooth over $\mathbb{Z}_\ell$. In the case of an abelian variety of type III, we know, thanks to Lombardo (see [Lom15b]), that for every prime number $\ell \geq \ell_0$ we have that the stabilizer are smoothe over $\mathbb{Z}_\ell$. However we had to give a good estimation in case $\ell < \ell_0$. In this estimation, the constants which intervene have the right to depend on the prime number ℓ. This last result is at the origin of the lemma 2.1.7. Finally, one of the last difficulties overcoming was the combinatorial calculation which , of course, was different from the one developed in [HiRa16].

The first chapter is a general introduction of some well known results, moreover we present a state of the art concerning the Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures on abelian varieties. Chapter 2 present a thorough study of the structure of the stabilizer $G(H)$ of every finite subgroup H of $\mathrm{A}[\ell^{\infty}]$. The theorem 2.1.7 gives the codimension of this stabilizers for every abelian variety of type I, II or III. Through this last result, we establish lemma 2.1.7 which gives an estimation of the index $(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$ for every prime number ℓ. During chapter 3, we develop the theory of ℓ-adic representations, more precisely, we explain in detail the property known as "property μ". In chapter 4, we present the proof of theorem 0.0.5. Actually, we give an explicit determination of the invariant $\gamma(A)$: in the case where A is a simple abelian variety of type III and fully of Lefschetz type and in the case where A is isogenous to a product of simple abelian varieties of type III and fully of Lefschetz type. The previous two steps allows us to prove theorem 0.0.5. At the end of chapter 4, we state theorem 0.0.6 concerning the order of a torsion point and the degree of the extension generated by this point. This last result is actually a consequence of the proof of the previous three theorems. Finally, using some results of Noot, Shimura, Banaszak, Gajda, Krasoń, and Pink, we prove new cases of the Mumford-Tate conjecture, more precisely, we establish in chapter 5 a list of abelian varieties which, we know, are fully of Lefschetz type, see theorems 0.0.7 and 0.0.8 and corollaries 0.0.2 and 0.0.3.

Chapitre 1

Préliminaires généraux

1.1 Variétés abéliennes

1.1.1 Variétés abéliennes complexes

Dans cette section nous aborderons différentes notions sur les variétés abéliennes complexes. Ces résultats sont extraits principalement des références suivantes : [Mum74, HiSi00, Mil20, BiLa04] et [MovdGon, Chapter XII]

Premières définitions

Soit $X = \mathfrak{t}/\Lambda$ un tore complexe de dimension g, où $\mathfrak{t}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ($\mathfrak{t} \simeq \mathbb{C}^g$) et Λ est un réseau de rang maximal $2g$.

Définition 1.1.1. *Une* ***polarisation*** *est une forme hermitienne définie positive $H : \mathfrak{t}\times\mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ telle que $L = Im(H) : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ prend des valeurs entières sur Λ. On dit alors que H est une polarisation du tore complexe $X = \mathfrak{t}/\Lambda$.*

Définition 1.1.2. *Une* ***variété abélienne complexe*** *X est un tore complexe qui possède une polarisation H.*

Définition 1.1.3. *Une variété abélienne complexe X est dite* ***simple*** *si elle ne contient aucune sous-variété abélienne non triviale.*

Définition 1.1.4. *Soit $\alpha : X \to X'$ un morphisme entre deux variétés abéliennes complexes. On dit que α est une* ***isogénie*** *si α est une surjection de noyau fini. On dit alors que X et X' sont isogènes.*

Remarque. En géométrie algébrique une polarisation correspond à une isogénie symétrique $\lambda : X \to X^\vee$ où $X^\vee$ est la variété duale de X. Le degré de cette polarisation, noté $\deg(\lambda)$, correspond au degré de l'isogénie.

Énonçons à présent le théorème de réductibilité de Poincaré :

Théorème 1.1.1. *Soit X une variété abélienne complexe. Pour toute sous-variété abélienne $X_1 \subset X$ il existe $X_2 \subset X$ une sous-variété abélienne telle que X soit isogène à $X_1 \times X_2$ (i.e. $X_1 + X_2 = X$ et $X_1 \cap X_2$ fini).*

Endomorphismes

Soit X une variété abélienne complexe.

Définition 1.1.5. *On pose* $D = \mathrm{End}^\circ(X) := \mathrm{End}_{\bar{K}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

On déduit du théorème 1.1.1 le théorème complet de réductibilité de Poincaré : si X est une variété abélienne complexe, alors il existe $X_1, ..., X_k$ ($k \geq 1$ entier) des variétés abéliennes simples deux à deux non isogènes et $m_1, ..., m_k$ des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$X \simeq X_1^{m_1} \times ... \times X_k^{m_k}, \tag{1.1}$$

alors on a

$$\mathrm{End}^\circ(X) = \prod_{i=1}^{k} M_{m_i}(\mathrm{End}^\circ(X_i)). \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.1. *Si X est une variété abélienne complexe simple alors D est une algèbre à division (i.e. un corps non commutatif ou un corps gauche).*

Proposition 1.1.2. *Pour toute variété abélienne complexe X, pas nécessairement simple,* $\mathrm{End}^\circ(X)$ *est une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple.*

Polarisation et involution de Rosati

Ces résultats sont extraits principalement des articles [MoZa95] et [Oor88].

Soit X une variété abélienne complexe et $X^\vee$ sa variété duale. On considère $\lambda : X \to X^\vee$ une polarisation associée à X et $D = \mathrm{End}^\circ(X)$ définie comme précédemment.

Introduisons à présent l'involution de Rosati, qui est naturellement associée à la polarisation λ

$$\begin{aligned} \dagger : D &\to D \\ a &\mapsto a^\dagger. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a \in D$, on a $a^\vee \in D^{opp}$ où $D^{opp} = \mathrm{End}^\circ(X^\vee) = \mathrm{End}(X^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et on a l'égalité suivante :

$$\lambda \circ a^\dagger = a^\vee \circ \lambda$$

De plus, il existe $m \geq 1$ et $b \in \mathrm{End}(X)$ tels que :

$$\lambda \circ b = m a^\vee \circ \lambda$$

On définit ainsi l'involution positive de Rosati par

$$a^{\dagger} = \frac{1}{m} b \in D.$$

Classification d'Albert

Les principales références utilisées pour cette partie sont l'article [MoZa95], et des extraits des livres [Mum74, BiLa04].

On suppose à présent que X est une variété abélienne complexe **simple**. On introduit les notations suivantes :

$$F = Z(D) \quad \text{et} \quad F_0 = \{a \in F, a^{\dagger} = a\}.$$

Ainsi, on obtient la tour d'extensions : $\mathbb{Q} \subset F_0 \subset F \subset D$, où

$$[F_0 : \mathbb{Q}] = e_0, \quad [F : \mathbb{Q}] = e \quad \text{et} \quad [D : F] = d^2.$$

On considère quatre types (I, II, III, IV) différents qui nous permettrons par la suite de caractériser $D = \mathrm{End}^{\circ}(X)$ ou X. On dira que X est de type I, II, III ou IV si l'algèbre D et l'involution $\dagger$ appartiennent à un de ces types :

— **Type I** : Lorsque $D = F = F_0$ et D est totalement réel avec $\dagger = id_D$

— **Type II** : Lorsque $d = 2$, $F = F_0$ et D est une algèbre de quaternions indéfinie sur un corps totalement réel F avec $\dagger : x \mapsto a^{-1}(Tr^0_{D/F}(x) - x)a$, où $Tr^0_{D/F}$ est la trace réduite de D/F et $a \in D - \{0\}$ avec $a^2 \in F$ totalement négatif.

— **Type III** : Lorsque $d = 2$, $F = F_0$ et D est une algèbre de quaternions définie sur un corps totalement réel F avec $\dagger : x \mapsto Tr^0_{D/F}(x) - x$.

— **Type IV** : Lorsque $e = 2e_0$ et F est un corps CM (voir définition ci dessous) avec $\dagger_{|F} : x \mapsto \bar{x}$.

Remarque. Grâce à l'équation (1.2) il suffit de déterminer la classification d'Albert pour les variétés abéliennes simples.

Définition 1.1.6. *On dit que F est un **corps CM** si F est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps F_0 totalement réel.*

Définition 1.1.7. *Soit X une variété abélienne telle que $\dim X = g$, avec les notations précédentes on définit la **dimension relative** comme suit :*

$$h := \dim_{\mathrm{rel}} X = \begin{cases} \dfrac{g}{e} & \textit{type I}, \\ \dfrac{g}{2e} & \textit{type II et III}, \\ \dfrac{g}{d^2 e_0} & \textit{type IV}. \end{cases}$$

1.2 Module de Tate ℓ-adique

Soit maintenant A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Soit $A^\vee$ la variété duale de A, soit $\phi : A \to A^\vee$ une polarisation quelconque de A de degré $\deg(\phi)$ et soit ℓ un nombre premier qui ne divise pas $\deg(\phi)$. On définit le module de Tate de la façon suivante :

$$\mathrm{T}_\ell(A) := \varprojlim_n \mathrm{A}[\ell^n],$$

où $\mathrm{A}[\ell^n]$ est le noyau de la multiplication par ℓ^n. On définit également

$$\mathrm{V}_\ell(A) := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

Vu comme groupes topologiques, on a les isomorphismes suivant :

$$\mathrm{T}_\ell(A) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2g} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_\ell(A) \simeq \mathbb{Q}_\ell^{2g}.$$

1.2.1 Accouplement de Weil

Il existe une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee)$ qui est Galois équivariante, dénommée accouplement de Weil ℓ-adique (voir [HiRa16, Paragraphe 3, pp 1857–1861] pour plus de détails) :

$$< .,. >: \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee) \to \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}.$$

La polarisation ϕ, définie précédemment, induit une forme bilinéaire non dégénérée antisymétrique :

$$\phi_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \overset{id\times\phi}{\to} \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee) \overset{<.,.>}{\to} \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}.$$

Cet accouplement vérifie la propriété suivante :

$$\forall x, y \in \mathrm{T}_\ell(A),\, \forall a \in \mathcal{O}_{E_\ell} \quad \phi_{\ell^\infty}(ax, y) = \phi_{\ell^\infty}(x, a^\dagger y),$$

où $\dagger$ désigne l'involution de Rosati définie sur $\mathrm{End}^\circ(A)$ (voir section précédente) et $\mathcal{O}_{E_\ell}$ désigne l'anneau des entiers de E_ℓ.

Dans le cas où ℓ ne divise pas le degré de ϕ, l'accouplement de Weil ℓ-adique est non-dégénéré modulo ℓ^n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Notons à présent $\mathcal{O}_{E_\ell}^*$ le dual de $\mathcal{O}_{E_\ell}$ pour la dualité donnée par la trace

$$Tr_{E_\ell/\mathbb{Q}_\ell} : Hom_{\mathcal{O}_{E_\ell}}(\mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathrm{T}_\ell(A), \mathcal{O}_{E_\ell}^*) \to Hom_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathrm{T}_\ell(A), \mathbb{Z}_\ell).$$

D'après le [HiRa16, Lemme 3.3] on sait qu'il existe un unique accouplement $\mathcal{O}_{E_\ell}$-linéaire

$$\phi^*_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}^*_{E_\ell}(1),$$

où $\mathcal{O}^*_{E_\ell}(1)$ correspond au twist de Tate, tel que

$$Tr_{E_\ell/\mathbb{Q}_\ell}(\phi^*_{\ell^\infty}) = \phi_{\ell^\infty}.$$

Supposons également que ℓ est non ramifié dans $\mathcal{O}_E$, ou de façon équivalente que $\mathcal{O}_{E_\ell} = \mathcal{O}^*_{E_\ell}$. On peut définir à présent l'accouplement λ-adique pour toute place λ de $\mathrm{End}^\circ(A)$ au-dessus de ℓ de la façon suivante :

$$\phi^*_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}^*_{E_\ell}(1) = \mathcal{O}_{E_\ell}.$$

Rappelons que

$$\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda \quad \text{et que} \quad \mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda, \quad \text{où} \quad \mathcal{T}_\lambda := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathcal{O}_\lambda. \tag{1.3}$$

Ainsi, par projection, on obtient les accouplements λ-adiques, ce sont des accouplements $\mathcal{O}_\lambda$-linéaires :

$$\phi_{\lambda^\infty} : \mathcal{T}_\lambda \times \mathcal{T}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda(1),$$

tels que, pour tout $x, y \in \mathrm{T}_\ell(A)$, on a $\phi^*_{\ell^\infty}(x,y) \otimes 1 = \phi_{\lambda^\infty}(x \otimes 1, y \otimes 1)$.

Remarque. 1. Les accouplements ℓ-adiques et λ-adiques sont Galois équivariants.

2. On notera $\phi^\circ_{\ell^\infty}$ et $\phi^\circ_{\lambda^\infty}$ les accouplements ℓ-adiques et λ-adiques définis sur V_ℓ et V_λ à valeurs dans E_ℓ et E_λ respectivement. On remarque que ces accouplements sont bien définis pour tout ℓ (sans aucune hypothèse).

Lorsque A est une variété abélienne de type I on a, pour tout $\lambda|\ell$:

$$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda,$$

où T_λ est irréductible.

Lorsque A est une variété de type II ou III on a, pour tout $\lambda|\ell$:

$$\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda,$$

où T_λ est irréductible.

En effet, cette décomposition existe, pour un nombre fini de λ, qu'après tensorisation par une extension quadratique. On renvoie le lecteur au chapitre 3 pour plus de détails.

1.3 Groupes

Les résultats présentés dans cette thèse concernent notamment les variétés abéliennes de type III (selon la classification d'Albert). On considère les accouplements de Weil ℓ-adiques et λ-adiques définis précédemment. Autrement dit, on considère la forme ϕ_{λ^∞} qui est bilinéaires symétriques définies sur T_λ. On peut lui associer la formes quadratique suivant :

$$Q_\lambda : \mathrm{T}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda;$$

1.3.1 Groupe orthogonal

On définit ainsi le groupe orthogonal de T_λ pour la forme quadratique Q_λ.

Définition 1.3.1. *Soit* $V = \mathrm{T}_\lambda$, $\phi = \phi_{\lambda^\infty}$ *et* $Q = Q_\lambda$, *on définit le groupe orthogonal* $O(V)$ *et le sous groupe spécial orthogonal* $\mathrm{SO(V)}$ *comme suit :*

1. $\mathrm{O(V)} = \{f \in \mathrm{Aut(V)}, Q(f(x)) = Q(x)\, \forall x \in V\}$,
2. $\mathrm{SO(V)} = ker(det : \mathrm{O(V)} \to \{-1, 1\})$,

de façon équivalente,

1. $\mathrm{O}_{(\mathrm{V},\phi)} = \{A \in GL(V), \phi(Av_1, Av_2) = \phi(v_1, v_2)\,, \forall v_1, v_2 \in V\}$,
2. $\mathrm{SO}_{(\mathrm{V},\phi)} = \mathrm{O}^\circ_{(\mathrm{V},\phi)}$.

On notera parfois $\mathrm{O_n}$ *ou* $\mathrm{SO_n}$ *où* $n = \dim V$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la forme quadratique considérée.*

On rappelle que la forme bilinéaire ϕ est dite non dégénérée lorsque $V^\perp = \{0\}$ où $V^\perp = \{x \in V, \phi(x, V) = 0\}$.

Dans la suite des définitions, on notera (V, ϕ) l'espace quadratique muni d'une forme bilinéaire symétrique ϕ.

Définition 1.3.2. *On dit que* $x \in V \setminus \{0\}$ *est un* ***vecteur isotrope*** *si* $\phi(x, x) = 0$, *c'est-à-dire que* $x \in x^\perp = \{y \in V, \phi(x, y) = 0\}$. *Dans le cas contraire on dira que le vecteur* x *est* ***anisotrope***.

Définition 1.3.3. *On définit le* ***cône isotrope*** $\mathcal{C}(V)$ *d'un espace quadratique* V *comme l'ensemble des vecteurs isotropes* $x \in V$.

Définition 1.3.4. *On dit que l'espace quadratique* (V, ϕ) *est un* ***espace isotrope*** *s'il existe un vecteur non nul isotrope. Dans le cas contraire on parlera d'****espace anisotrope****. On dira que l'espace quadratique* (V, ϕ) *est* ***totalement isotrope*** *lorsque tous ses vecteurs non nuls sont isotropes (ce qui est équivalent à dire que la forme bilinéaire est nulle sur* V*).*

Remarque. Soit $W \subset V$ un sous-espace de l'espace quadratique (V, ϕ) non dégénéré. Lorsque W est un sous-espace isotrope maximal de V, on a dim $W \leq \frac{\dim V}{2}$.

Définition 1.3.5. *On dira que l'espace quadratique (V, ϕ) est* ***régulier*** *lorsque $V^{\perp} = \{0\}$.*

Remarque. On remarque qu'un espace quadratique anisotrope est régulier.

Dimensions : On notera par la suite $\mathfrak{o}_n$ et $\mathfrak{so}_n$ les algèbres de Lie de $\mathrm{O_n}$ et de $\mathrm{SO_n}$. Soit $M \in \mathrm{O_n}$, alors SM est une matrice antisymétrique où S est une matrice symétrique de déterminant non nul. On peut décrire $\mathrm{O_n}$ et $\mathfrak{o}_n$ de la façon suivante :

$$\mathrm{O_n = \{M \in GL(V), {}^tMSM = S\};}$$

$$\mathfrak{o}_n = \{M \in \mathfrak{gl}(V), {}^tMS + SM = 0\}.$$

De plus, on sait que $\mathrm{O_n}$ et $\mathrm{SO_n}$ ont même dimension, celle donnée par leur algèbre de Lie. On obtient alors que :

$$\dim \mathrm{SO_n} = \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}.$$

1.3.2 Formes quadratiques

Pour plus d'informations concernant les formes quadratiques on renvoie le lecteur à [Cas78].

Généralités sur les formes quadratiques

Soit (V,Q) un espace quadratique défini sur un corps K, tel que $car(K) \neq 2$, et dim $V = n$. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une K-base bien choisie de V, ainsi pour tout $x \in V$ il existe $x_1, ..., x_n \in K$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Dans cette base, la forme quadratique Q non dégénérée peut être écrite de la façon suivante pour tout $x \in V$:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2,$$

où la classe d'isomorphisme de Q ne dépend que de $a_i \mod K^{*2}$.

On introduit à présent la notation suivante, on dira que la forme quadratique Q est équivalente, dans une base orthogonale bien choisie, à $< a_1, ..., a_n >$.

Définition 1.3.6. *On dira que deux* ***formes quadratiques*** *Q_1 et Q_2 sur K sont* ***équivalentes*** *lorsqu'il existe une matrice $C \in GL(V)$ telle que $Q_2 = aQ_1 \circ C$ où $a \in K^*$. On notera alors $Q_1 \sim Q_2$.*

Proposition 1.3.1. *Soit Q une forme quadratique non dégénérée définie sur K. Soit r_Q la dimension du plus grand sous-espace de V sur lequel $Q \equiv 0$. Alors*

$$Q \sim x_1x_2 + x_3x_4 + ... + x_{2r_Q-1}x_{2r_Q} + Q_1,$$

où Q_1 est une forme quadratique anisotrope (i.e. $\forall x \in V$, $Q_1(x) \neq 0$).

Des outils importants seront les notions de plan hyperbolique et d'espace hyperbolique. Fixons maintenant une notation : soit $d \in K$, on note $< d >$ la classe d'isométrie de l'espace de dimension 1 correspondant à la forme quadratique $Q(x) = dx^2$. On remarque que l'espace $< d >$ est régulier lorsque $d \in K^*$.

Définition 1.3.7. *Soit (V, Q) un espace quadratique de dimension 2. On dira que V est un **plan hyperbolique** lorsque V satisfait une des trois propriétés suivantes :*

(1) V correspond à la classe d'équivalence de la forme quadratique x_1x_2 ;

(2) V est isométrique à $< 1, -1 >$;

(3) V est régulier et isotrope.

*Soit (V, Q) un espace quadratique de dimension paire $2m$, on dira que V est un **espace hyperbolique** lorsque V est une somme orthogonale de plans hyperboliques. De plus sa forme quadratique associée Q est équivalente à :*

$$Q \sim (x_1^2 - x_2^2) + ... + (x_{2m-1}^2 - x_{2m}^2),$$

ou bien

$$Q \sim x_1x_2 + ... + x_{2m-1}x_{2m}.$$

On introduit à présent le théorème de décomposition de Witt.

Théorème 1.3.1. *Tout espace quadratique (V, Q) se décompose en somme orthogonale :*

$$(V_t, Q_t) \perp (V_h, Q_h) \perp (V_a, Q_a)$$

où V_t est le noyau de la forme quadratique Q (c'est un espace totalement isotrope), V_h est un espace hyperbolique et V_a est un espace anisotrope. De plus chaque espace est uniquement déterminé à isométrie près.

Résultats concernant les formes quadratiques sur $\mathbb{Q}_\ell$

Les formes quadratiques avec lesquelle on travaille sont les suivantes :

$$Q_\lambda : \mathrm{T}_\lambda \to \mathcal{O}_\lambda;$$

$$Q_\lambda^\circ : \mathrm{V}_\lambda \to E_\lambda.$$

Elles sont respectivement définies sur $\mathbb{Z}_\ell$ et $\mathbb{Q}_\ell$. On va s'intéresser à présent à la forme quadratique Q_ℓ°. Soit $\{e_1, ..., e_{2g}\}$ une $\mathbb{Q}_\ell$-base de V_ℓ. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{V}_\ell$ il existe $x_1, ..., x_{2g} \in \mathbb{Q}_\ell$ tels que $x = \sum_{i=1}^{2g} x_i e_i$. Dans cette base, la forme quadratique non dégénérée peut s'écrire de la façon suivante, pour tout $x \in \mathrm{V}_\ell$:

$$Q_\ell^\circ(x) = \sum_{i=1}^{2g} a_i x_i^2,$$

où la classe d'isomorphisme de Q ne dépend que de $a_i \mod \mathbb{Q}_\ell^{*2}$.

On se place dans le cas où ℓ est un nombre premier impair. Soit $\epsilon \in \mathbb{Z}_\ell^*$ tel que ϵ ne soit pas un carré modulo ℓ. Ainsi $\mathbb{Q}_\ell^*/\mathbb{Q}_\ell^{*2} = \{1, \ell, \epsilon, \epsilon\ell\}$.

Théorème 1.3.2. *Soit V un espace quadratique défini sur $\mathbb{Q}_\ell$, alors lorsque* $\dim V \geq 5$ *il existe au moins un vecteur isotrope dans V_ℓ pour toute forme quadratique définie sur $\mathbb{Q}_\ell$.*

Remarque. Ce résultat sera utile lorsque l'on fera la preuve du théorème 2.1.5 concernant la codimension du stabilisateur.

1.3.3 Quelques rappels sur les groupes orthogonaux et symplectiques

Soit $(\mathrm{V}_\ell, Q_\ell^\circ)$ l'espace quadratique muni de la forme bilinéaire $\phi_{\ell\infty}^\circ$ introduite précédemment. Soit à présent le multiplicateur défini de la façon suivante, où $G = \mathrm{GSp_{2g}}$ ou $\mathrm{GO_{2g}}$ (voir définitions ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \mathrm{mult} : G &\to \mathbb{G}_m \\ u &\mapsto \mathrm{mult}_u. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Définition 1.3.8. *On dira qu'une transformation linéaire u est une **similitude orthogonale** si, pour tout vecteur $x \in \mathrm{V}_\ell$, on a $Q_\ell^\circ(u(x)) = \mathrm{mult}_u Q_\ell^\circ(x)$. On notera $\mathrm{GO_{2g}}$ le **groupe des similitudes orthogonales**.*

Remarque. On notera $\mathrm{GO_{2g}} = \mathrm{GO}(\mathrm{V}_\ell, \mathrm{Q}_\ell^\circ)$ ou bien $\mathrm{GO}(\mathrm{Q}_\ell^\circ)$ lorsque il n'y a pas d'ambiguïté avec l'espace quadratique considéré.

Définition 1.3.9. *On dira qu'une transformation linéaire u est une **similitude symplectique** si pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{V}_\ell$, on a $\phi_{\ell\infty}^\circ(u(x), u(y)) = \mathrm{mult}_u \phi_{\ell\infty}^\circ(x, y)$. On notera $\mathrm{GSp_{2g}}$ le **groupe des similitudes symplectiques**.*

Remarque. De plus, le noyau du multiplicateur s'identifie au **groupe des transformations orthogonales** $\mathrm{O_{2g}}$ (respectivement au **groupe spécial des similitudes symplectiques** $\mathrm{Sp_{2g}}$) lorsque $G = \mathrm{GO_{2g}}$ (respectivement $G = \mathrm{GSp_{2g}}$).

Définition 1.3.10. *Une **isométrie** u (orthogonale ou symplectique) qui respecte une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique $\phi_{\ell\infty}^\circ$ est telle que l'égalité suivante est vérifiée*

$$\phi_{\ell\infty}^\circ(u(x), u(y)) = \phi_\ell^\circ(x, y),$$

avec $\mathrm{mult}(u) = 1$.

1.4 Conjecture de Hodge, Tate et Mumford-Tate

L'objectif de cette section est de présenter les conjectures de Hodge, Tate et Mumford-Tate pour les variétés abéliennes. Ces conjectures ont été énoncées pour toute variété algébrique projective lisse, cependant on se focalisera uniquement sur le cas des variétés abéliennes. On énoncera également quelques résultats connus dans ces directions. Il existe plusieurs articles de survey sur la conjecture de Hodge (voir [Gor99, Gee94]), ainsi que sur la conjecture de Mumford-Tate (voir [HiRa16, Appendice]). En ce qui concerne la conjecture de Tate, on trouve quelques articles de survey comme par exemple [Mil07]. On peut retrouver quelques articles qui relient ces trois conjecture dans le cas de variétés abéliennes, comme par exemple [Chi92, CF16].

La conjecture de Hodge, introduite en 1950, est un des sept problèmes du millénaire de l'Institut Clay, et a comme but d'établir un lien entre la Géométrie Algébrique et la Géométrie Différentielle. En effet, un des premiers résultats dans cette direction est le théorème des classes de type $(1, 1)$ de Lefschetz (voir [Lef24]). Grâce à ce dernier théorème et à la dualité de Poincaré, on sait que la conjecture est vérifiée pour les variétés abéliennes de dimension inférieure ou égale à 3.

Une conjecture analogue à cette dernière en Géométrie Arithmétique est la conjecture de Tate (voir [Tat65]), énoncée en 1963. L'analogue du théorème de Lefschetz dans le cas ℓ-adique est le théorème de Faltings (voir [Fal83, Theorem 3 and 4]).

Finalement, la conjecture de Mumford-Tate énoncée en 1966 par Mumford (voir [Mum66, Section 4]) établit un lien entre ces deux conjectures.

1.4.1 Conjecture de Hodge : définitions et résultats

Soit A une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$ de dimension g, pour tout $p \in [\![1, g]\!]$ on a

$$H^{2p}(A, \mathbb{C}) = \bigwedge^{2p} H^1(A, \mathbb{C}), \tag{1.5}$$

où on a une définition simple de la cohomologie singulière ou de Betti de la variété abélienne A : $H^1(A, \mathbb{C}) = T_0(A) \oplus T_0(A)^\vee$, où $T_0(A)$ est l'espace tangent de A à l'origine. Ainsi,

$$H^{2p}(A, \mathbb{C}) = \bigwedge^{2p} T_0(A) \oplus T_0(A)^\vee = \bigoplus_{r+s=2p} \left(\bigwedge^{r} T_0(A) \wedge \bigwedge^{s} T_0(A)^\vee\right). \tag{1.6}$$

Pour tous entiers r et s tels que $r + s = p$ on note $H^{r,s} = \bigwedge^r T_0(A) \wedge \bigwedge^s T_0(A)^\vee$, ainsi on obtient, dans ce cas, la décomposition de Hodge ;

$$H^{2p}(A, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r+s=2p} H^{r,s}. \tag{1.7}$$

Définition 1.4.1. *Soit* $p \in [\![1, g]\!]$, *le* ***groupe des classes de Hodge de codimension*** p *est défini comme suit :*

$$B^p(A) := H^{2p}(A, \mathbb{Q}) \bigcap H^{p,p}.$$

Définissons à présent le groupe de Hodge. Pour cela on a besoin d'introduire quelques notations. Soient $V = H_1(A, \mathbb{Q})$ le premier groupe d'homologie, $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \subset \mathrm{GL}(V)$ le groupe des homothéties et $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ la restriction aux scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Grâce à la décomposition de Hodge on a

$$V_{\mathbb{C}} = H_1(A, \mathbb{C}) = V^{-1,0} \oplus V^{0,-1}.$$

Soit $U^1 \subset \mathbb{S}$ tel que $U^1(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^*, z\bar{z} = 1\}$ où $\bar{z}$ est la conjugaison complexe.

On considère le morphisme $h : \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V)_{\mathbb{R}}$ défini pour tout $z \in \mathbb{S}$ de la façon suivante :

$$h(z)(v^{-1,0}) = zv^{-1,0} \quad \text{et} \quad h(z)(v^{0,-1}) = \bar{z}v^{0,-1},$$

où $v^{-1,0} \in V^{-1,0}$ et $v^{0,-1} \in V^{0,1}$.

Rappelons que la donnée de h est équivalent à la donnée de la structure de Hodge sur $H_1(A, \mathbb{C})$.

Définition 1.4.2. *Le* ***groupe de Mumford-Tate*** MT(A) *est le plus petit sous-groupe algébrique de* $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\mathbb{Q}$ *tel que* h *se factorise à travers* $\mathrm{MT(A)} \otimes \mathbb{R}$.

La première définition dans la littérature du groupe de Hodge à été donnée par Mumford en 1966 (voir [Mum66, Paragraph 1, Definition 1]).

Définition 1.4.3. *Le* ***groupe de Hodge*** Hg(A) *est le plus petit sous-groupe algébrique de* $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\mathbb{Q}$ *tel que* $h_{|U^1}$ *se factorise à travers* $\mathrm{Hg(A)} \otimes \mathbb{R}$. *Ou bien le groupe de Hodge est tout simplement la composante connexe de l'identité de* $\mathrm{MT(A)} \cap SL(V)$

Remarque. Le groupe de Hodge est un groupe algébrique réductif (voir [Mum66, Paragraphe 2, Theorem 1]).

Exemple. Dans le cas d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{C}$, le groupe de Hodge est soit le groupe $SL_2(V)$ (dans le cas où E est sans multiplication complexe), soit un tore (lorsque E est CM).

On peut relier le groupe de Hodge et les classes de Hodge grâce au théorème suivant (voir [Mum66, Paragraph 1, Proposition 1]) :

Théorème 1.4.1. *Pour tout entier $p \in [\![1, g]\!]$ on a l'égalité :*

$$B^p(A) = H^{2p}(A, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg(A)}}. \tag{1.8}$$

Énonçons à présent la conjecture de Hodge :

Conjecture 1.4.1 (Conjecture de Hodge '50)**.** *Toute classe de Hodge est une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de classes algébriques.*

Rappelons brièvement la définition de classes algébriques. Soit $Z^i(A)$ les cycles algébriques de codimension i défini par $Z^i(A) = \oplus_Y \mathbb{Z}[Y]$ où Y est une sous-variété de codimension i. Dans toute cohomologie de Weil (singulière, de Betti, ℓ-adique) il existe une application "cycle" $Z^i(A) \to H^{2i}(A)$ dont les éléments de l'image s'appellent classes algébriques.

Quelques résultats connus Grâce au théorème des classes de type $(1, 1)$ de Lefschetz (voir [Lef24]) et à la dualité de Poincaré on sait que la conjecture de Hodge est vérifiée dans le cas des variétés abéliennes complexes de dimension inférieure ou égale à 3. En effet, dans le but de prouver la conjecture de Hodge il suffit de prouver que la $\mathbb{Q}$-algèbre graduée $B^\bullet = \bigoplus^p B^p(X)$ est engendrée par les classes de Hodge de codimension 1, à savoir $B^1(X)$. Ainsi, lorsque la dimension de la variété abélienne est inférieure ou égale à 3 on obtient le résultat. Cependant il se peut que le groupe des classes de Hodge contienne des classes dites exceptionnelles, comme par exemple les variétés abéliennes de dimension 4 et de type III selon la classification d'Albert en contiennent.

Étant donné que les courbes elliptiques vérifient la conjecture de Hodge, Imai a prouvé en 1976 qu'elle est aussi vérifiée pour un produit de courbes elliptiques. En 1983, avant que le théorème de Faltings ait été prouvé, Ribet et Tankeev ont prouvé que la conjecture de Hodge est vérifiée dans le cas où la dimension de la variété abélienne est un nombre premier (voir [Tan83, Rib83]). Une des principales raisons pour laquelle la conjecture de Hodge n'est pas démontrée pour certaines variétés abéliennes est l'existence de classes exceptionnelles (voir [Mur84] pour plus de détails) comme par exemple les variétés abéliennes de type III dans la classification d'Albert qui possèdent des classes exceptionnelles. En 1984, Murty et Hazama ont prouvé indépendamment que, lorsque la variété abélienne ne possède pas de facteurs de type III et que le groupe de Hodge est le groupe de Lefschetz (dans le sens de Milne [Mil99]), la conjecture de Hodge est alors vérifiée pour toute puissance de la variété abélienne (voir [Mur84, Haz85]). Ce dernier résultat est un des premiers à mettre en valeur l'importance d'étudier les variétés abéliennes en fonction de leur algèbre d'endomorphismes. D'où l'intérêt d'étudier les variétés abéliennes en fonction de leur type dans la classification d'Albert. Citons à présent deux autres résultats concernant la conjecture de Hodge. Moonen et Zarhin ont prouvé que, sauf cas particuliers, la conjecture de Hodge était vérifiée pour les variétés abéliennes de dimension inférieure ou égale à 5 (voir [MoZa95, MoZa99]). Enfin, un autre résultat connu est celui concernant les variétés abéliennes de type CM : si A est une variété abélienne de dimension g telle que le groupe de Mumford-Tate est de dimension maximale $g+1$, alors la conjecture est vérifiée.

1.4.2 Conjecture de Tate : définitions et résultats

On introduit à présent la conjecture de Tate, qui a été énoncée en 1963. Soit A une variété abélienne simple définie sur un corps de nombres K. Soit $G_K = Gal(\bar{K}/K)$ son groupe de Galois absolu. Soit ℓ un nombre premier, $\mathrm{T}_\ell(A)$ le module de Tate ℓ-adique et $\mathrm{V}_\ell(A) := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ son espace vectoriel associé. On considère la représentation ℓ-adique suivante :

$$\rho_\ell : \mathrm{G_K} \to \mathrm{GL(T_\ell(A))}. \tag{1.9}$$

On définit le groupe algébrique $\mathrm{G}_\ell = \overline{\rho(G_K)}^{Zar}$, autrement connu comme le groupe de monodromie ℓ-adique, et on note H_ℓ la composante connexe de l'identité de $\mathrm{G}_\ell \cap \mathrm{SL}(\mathrm{V}_\ell)$.

Remarque. Le groupe de Hodge a été introduit par Mumford en 1966 dans le but de pouvoir l'identifier avec le groupe H_ℓ.

Exemple. Soit E une courbe elliptique, le groupe H_ℓ est soit le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathrm{V}_\ell)$ (dans le cas où E est sans multiplication complexe), soit un tore (lorsque E est CM).

Définition 1.4.4. *Soit $p \in [\![1, g]\!]$ un entier. Le* ***groupe des classes de Tate de codimension*** *p est défini comme suit :*

$$\mathrm{Tate}^p(A) := H^{2p}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell(p))^{\mathrm{H}_\ell},$$

où $H^{2p}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell(p)) = (\varprojlim H^{2p}_{ét}(A_{\bar{K}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes p})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$.

Énonçons à présent la conjecture de Tate, voir [Tat65].

Conjecture 1.4.2 (Conjecture de Tate '63)**.** *Toute classe de Tate est une combinaison $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire de classes algébriques.*

Quelques résultats connus Un des premiers résultats connus est le théorème de Faltings, prouvé en 1983, voir [Fal83]. Il affirme que la représentation ℓ-adique ρ_ℓ (voir (1.9)) est semi-simple, et que par conséquent, la composante identité de G_ℓ est un groupe réductif. De plus, grâce à ce théorème, on sait que les classes de Tate de codimension 1 sont des classes algébriques. Ainsi, le théorème de Faltings est un analogue ℓ-adique du théorème des classes de type $(1,1)$ de Lefschetz. La conjecture de Tate est vérifiée lorsque la dimension de la variété abélienne est inférieure ou égale à 3 ou bien lorsqu'elle est un nombre premier. Moonen et Zarhin l'ont prouvé également dans certains cas lorsque la variété abélienne est de dimension 4, voir [MoZa95]. Finalement, dans le cas des variétés abéliennes, on sait que, lorsque les conjectures de Hodge et Mumford-Tate sont vérifiées, alors la conjecture de Tate est aussi vérifiée pour cette variété abélienne. Pour plus de détails sur ce dernier point on renvoie à [CF16].

1.4.3 Conjecture de Mumford-Tate : quelques résultats

Grâce aux théorèmes de comparaison entre la cohomologie singulière et la cohomologie étale on peut énoncer la conjecture de Mumford-Tate, voir [Mum66]

Conjecture 1.4.3 (Conjecture de Mumford-Tate '66). *On a* $\mathrm{Hg(A)} \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathrm{H}_\ell$ *pour tout nombre premier* ℓ*.*

Quelques résultats connus D'après Pjateckiĭ-Šapiro [PS71, Theorem 4, p 624]), Borovoĭ [Bor74] et Deligne [DMOS82, Exp I, 2.9, 2.11, 3.2] on sait que

$$\mathrm{G}_\ell{}^\circ \subset \mathrm{MT(A)} \otimes \mathbb{Q}_\ell. \tag{1.10}$$

Or d'après Faltings [Fal83] on sait que les groupes algébriques MT(A) et G_ℓ sont des groupes réductifs qui ont le même commutant. Ainsi, on a les égalités suivantes

$$\mathrm{MT(A)} = S \cdot C = \{sc,\ s \in S,\ c \in C\}, \qquad \mathrm{G}_\ell = S_\ell \cdot C_\ell = \{sc,\ s \in S_\ell,\ c \in C_\ell\}, \tag{1.11}$$

où les $\mathbb{Q}$-groupes algébriques S et C sont définis respectivement comme étant le groupe dérivé de MT(A) et la composante neutre du centre, les $\mathbb{Q}_\ell$-groupes algébriques S_ℓ et C_ℓ sont définis de façon équivalente.

En reprenant l'équation (1.10) on obtient les deux inclusions suivantes :

$$C_\ell \subset C \otimes \mathbb{Q}_\ell, \qquad S_\ell \subset S \otimes \mathbb{Q}_\ell. \tag{1.12}$$

La première inclusion de l'équation (1.10) est une égalité (voir [Ser98, Vas08]). Pour montrer que la deuxième inclusion est en fait une égalité, *i.e.* montrer que la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A, il est bien connu qu'il suffit de montrer l'égalité des rang des groupes semi-simples S et S_ℓ. Un autre résultat important, dû à Larsen et Pink (voir [LaPi95, Theorem 4.3]), affirme que lorsque l'on a égalité des rangs pour un nombre premier ℓ, alors c'est aussi vrai pour tout nombre premier. En particulier, si la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour un nombre premier, alors elle l'est aussi pour tout nombre premier.

En 1991 Chi a montré que la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée pour toute variété abélienne simple dont la dimension est un nombre premier, voir [Chi91]. De même, les courbes elliptiques vérifient la conjecture de Mumford-Tate, cela a été prouvé par Serre en 1972. Ribet a prouvé en 1973 [Rib76, Paragraph V] que la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée dans le cas où A est une variété abélienne de dimension g telle que D est un corps totalement réel de dimension g et telle qu'il existe une place de mauvaise réduction semi-stable. Il est important de préciser que le théorème de Faltings n'existait pas lorsque Ribet a démontré ce résultat. Ainsi, après le théorème de Faltings, plusieurs auteurs dont Serre, Chi, Hall, Pink, Banaszak, Gajda, Krasoń, Hindry et Ratazzi ont prouvé des nouveaux cas de la conjecture que l'on énoncera à présent.

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K de dimension g.

Théorème 1.4.2 (Serre '85, [Ser03b]). *Supposons que* $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathbb{Q}$ *et que* g *est un entier impair, alors* A *vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

Théorème 1.4.3 (Chi '92, [Chi92]). *La conjecture de Mumford-Tate est vraie dans les quatre cas suivants :*

- *Lorsque la variété abélienne* A *est de type I,*
  - $g = 2$ *ou un entier impair et tel que* $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathbb{Q}$ *;*
  - $g = 2d$ *où* d *est un entier impair et tel que* $\mathrm{End}^\circ(A) = E$ *est un corps quadratique réel.*
- *Lorsque la variété abélienne* A *est de type II,*
  - $g = 2d$ *où* $d = 2$ *ou un entier impair et tel que* $\mathrm{End}^\circ(A) = D$ *est une algèbre de quaternions indéfinie définie sur* $\mathbb{Q}$ *;*
  - $g = 4d$ *où* d *est un entier impair et tel que* $\mathrm{End}^\circ(A) = D$ *est une algèbre de quaternions indéfinie définie sur un corps quadratique réel.*

Introduisons à présent l'ensemble défini par Pink, où k est un entier impair :

$$\Sigma := \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, \exists a \geq 1, g = 2^{k-1}a^k \right\} \bigcup \left\{ g \geq 1; \exists k \geq 3, 2g = \binom{2k}{k} \right\}.$$

Théorème 1.4.4 (Pink '98, [Pin98]). *Supposons que* $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathbb{Q}$ *et que* $g \notin \Sigma$ *alors, pour tout nombre premier* ℓ *on a* $G_\ell^\circ = \mathrm{MT(A)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ *En particulier, la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée pour* A*.*

Banaszak, Gajda et Krasoń ont utilisé le théorème de Pink pour généraliser les résultats de Chi. Dans ce sens, ils ont prouvé le résultat suivant concernant les variétés abéliennes de type I et II.

Théorème 1.4.5 (Banaszak, Gajda et Krasoń '06, [BGK06]). *Soit* A *une variété abélienne de type I ou II dans la classification d'Albert et de dimension relative impaire (ou égale à* 2*). Alors* $\mathrm{MT(A)} = \mathrm{GSp_{2g}}$ *et* $\mathrm{G_\ell}^\circ = \mathrm{MT(A)} \otimes \mathbb{Q}_\ell$*, par conséquent* A *vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

Hall a prouvé en 2011 le résultat suivant :

Théorème 1.4.6 (Hall '11, [Hal11]). *Supposons que* $\mathrm{End}^\circ(A) = \mathbb{Q}$ *et que le modèle de Néron de* A *sur* $\mathcal{O}_K$ *possède une fibre semi-stable de dimension torique égale à* 1*. Alors* $\mathrm{G_\ell}^\circ = \mathrm{GSp_{2g,\mathbb{Q}_\ell}}$ *et* A *vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

En 2016 Hindry et Ratazzi ont généralisé le résultat de Pink et de Hall, voir [HiRa16, Corollaire 1.8]. On présentera le résultat lorsque A est une variété abélienne géométriquement simple, cependant un résultat analogue existe concernant les produits de variétés abéliennes (voir [HiRa16, Corollaire 1.15])

Théorème 1.4.7 (Hindry et Ratazzi '16)**.** *Soit A une variété abélienne simple de type I ou II telle que le centre de* $\mathrm{End}^\circ(A)$ *soit un corps totalement réel de degré e. On suppose que l'une des trois hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *La dimension relative h de A est un entier impair ou égal à 2,*
2. *On a $e = 1$ et $h \notin \Sigma$,*
3. *La variété abélienne A est de type I (resp. II) et possède une place de mauvaise réduction semi-stable avec dimension torique e (resp. $2e$).*

On a alors que la variété abélienne est pleinement de type Lefschetz, en particulier A vérifie la conjecture de Mumford-Tate.

Remarque. La définition 3.1.2 donne une définition plus précise de variété abélienne pléinement de type Lefschetz.

Moonen et Zarhin [MoZa99] et Lombardo [Lom16] ont également prouvé que la conjecture de Mumford-Tate est vérifiée pour les variétés abéliennes, non nécessairement simples de dimension inférieur ou égale à 5. Cependant le cas où A est une variété abélienne de dimension 4, de type I et de groupe de Hodge isomorphe à $(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Q}})^3$, est encore inconnu.

Signalons qu'il existe une version plus forte de la conjecture de Mumford-Tate suggérée par Serre concernant l'indice de l'image de Galois dans le groupe de Mumford-Tate (voir le premier paragraphe de [HiRa16, Appendice]). Citons à présent le théorème suivant, dû à Hindry et Ratazzi, qui est une conséquence des résultats de Serre et Wintenberger, [Ser03a, Win02] :

Théorème 1.4.8. *([HiRa16, Théorème 10.1]) Si A est une variété abélienne définie sur un corps de nombres K telle qu'elle vérifie la conjecture de Mumford-Tate, alors l'indice de la représentation ℓ-adique galoisienne $\rho(G_K)$ dans* $\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell)$ *est borné indépendamment de ℓ.*

Chapitre 2

Lemmes de groupes

2.1 Stabilisateurs

On rappelle que $\mathrm{V}_\ell(A)$ est un espace quadratique muni de la forme bilinéaire et de la forme quadratique induite :

$$\phi^\circ_{\ell^\infty} : \mathrm{V}_\ell(A) \times \mathrm{V}_\ell(A) \to E_\ell \qquad Q^\circ_\ell : \mathrm{V}_\ell(A) \to E_\ell.$$

Soit H un sous-groupe fini de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$, alors il existe un entier n non nul tel que H soit un sous-groupe fini de $\mathrm{A}[\ell^n]$.

Dans une base bien choisie, le sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ s'écrit de la façon suivante :

$$H = \prod_{i=1}^{t} (\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-(i-1)}}\mathbb{Z})^{\alpha_i} \subset \mathrm{A}[\ell^n],$$

où les entiers m_i forment une suite strictement croissante.

Notons $H_i = (\mathbb{Z}/\ell^{m_i}\mathbb{Z})^{\alpha_{t-(i-1)}} \subset A[\ell^{m_i}]$, on peut lui associer de façon non canonique le sous-module $\hat{H}_i$ tel que

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r, hook] & A[\ell^{m_i}] \\ \hat{H}_i \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & \mathrm{T}_\ell(A) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \text{et tels que} \qquad \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}/\ell^{m_i}\mathbb{Z}}\, H_i = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}\, \hat{H}_i. \tag{2.1}$$

Étudions à présent le cas où le sous-groupe $H = (\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})^{\alpha_1} \subset A[\ell^{m_1}]$, on expliquera comment généraliser après. Soit $\{e_1, ..., e_r\}$ une $\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z}$ base de H et $\{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_r\}$ une $\mathbb{Z}_\ell$-base de $\hat{H} \subset \mathrm{T}_\ell(A)$ telle que $\hat{e}_i \equiv e_i \mod \ell^{m_1}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. On a le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $H = (\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})^{\alpha_1} \subset A[\ell^{m_1}]$ un sous-groupe totalement isotrope et soit $\pi_{m_1} : \mathrm{T}_\ell(A) \to A[\ell^{m_1}]$ la projection canonique. Alors il existe un sous-module $H_\infty \subset \mathrm{T}_\ell(A)$ totalement isotrope tel que $\pi_{m_1}(H_\infty) = H$.*

La preuve est plus simple que dans le cas général, on renvoie le lecteur à la preuve du [HiRa12, Lemme 3.7] pour plus de détails.

Également, il est important de remarquer que lorsque H est un End(A)-module, on peut choisir $\hat{H}$ tel qu'il soit aussi un End(A)-module.

Étudions à présent le cas général. Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on a

$$H = \prod_{i=1}^{t} (\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-(i-1)}}\mathbb{Z})^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{t} H_i,$$

Pour tout $i \in [\![1, t]\!]$, on choisit un sous-module $\hat{H}_i$ de $\mathrm{T}_\ell(A)$ tel que

$$\begin{aligned} \pi_{m_{t-(i-1)}} : \mathrm{T}_\ell(A) &\twoheadrightarrow \mathrm{T}_\ell(A)/\ell^{m_{t-(i-1)}}\mathrm{T}_\ell(A) \\ \hat{H}_i &\mapsto H_i. \end{aligned}$$

On pose $W_1 = \hat{H}_1 + ... + \hat{H}_t$ tel que $\pi_{m_1}(W_1) = H[\ell^{m_1}] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})^{\alpha_1+...+\alpha_t}$. On pose de la même façon

$$W_i = \hat{H}_1 + ... + \hat{H}_{t-(i-1)},$$

des sous-modules de $\mathrm{T}_\ell(A)$ tels que $W_t \subset ... \subset W_1$, on remarque que $\pi_{m_t}(W_t) = (\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})^{\alpha_t}$.

Ainsi, à tous sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on lui associe une filtration de sous-modules de $\mathrm{T}_\ell(A) : W_t \subset ... \subset W_1$.

On définit pour chaque sous-module W_i son stabilisateur G_{W_i} de la façon suivante :

$$G_{W_i} = \{g \in G, \quad \forall x \in W_i, \quad g(x) = x\}.$$

On notera $G(H)$ le stabilisateur de H défini grâce comme suit :

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell), \quad M \in G_{W_i} \mod \ell^{m_i}\}.$$

Remarquons que $\rho_\ell(Gal(\bar{K}/K(H)))$ s'identifie avec $G(H)$.

2.1.1 Résultats concernant la codimension des stabilisateurs

Soit W le $\mathbb{Q}_\ell$-sous espace vectoriel de V_ℓ défini précédemment, on note r sa dimension. Le but de cette partie est d'étudier le stabilisateur $G_W \subset GL_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$ défini comme suit :

$$G_W = \{g \in \mathrm{GO}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})), \mathrm{g}_{|\mathrm{W}} = \mathrm{id}_\mathrm{W}\}.$$

Remarque. Certains auteurs nomment ce dernier groupe le fixateur de W.

Résultats préliminaires

Théorème 2.1.1. *(Théorème de Witt généralisé) Soit (V, Q) un espace quadratique. On considère W un sous-espace vectoriel de V. Soit $s \in O(W, Q_{|W})$ une isométrie de W. Alors on peut prolonger s en une isométrie de V, ainsi, il existe $u \in O(V, Q)$ telle que $u_{|W} = s$.*

On renvoie à [Art57, Théorème 3.9 p. 119] pour plus de détails.

Rappelons à présent deux résultat bien connu sur les dimensions en géométrie algébrique. Pour plus de détail, on renvoie le lecteur à [Har77] ou à [HiSi00].

Théorème 2.1.2. *Soient X et Z des variétés algébriques irréductibles, on considère $\phi : X \to Z$ un morphisme dominant. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Soit $\eta_{Z,générique}$ la fibre générique de ϕ. Alors pour tout $z \in Z$ on a*
$$\dim\, \phi^{-1}(\{\eta_{Z,générique}\}) \leq \dim\, \phi^{-1}(z).$$
De plus, pour $z \in U$ un ouvert non vide de Z on a l'égalité ;
2. *De plus $\dim X = dim\, Z + \dim\, \phi^{-1}(\{\eta_{Z,générique}\})$.*

Proposition 2.1.1 (Critère jacobien)**.** *[HiSi00, Lemma A.1.4.2] Soit X une variété irréductible. On considère l'espace tangent $T_x(X)$ de X en un point $x \in X$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $x \in X$ on a $\dim\, T_x(X) \geq \dim\, X$,*
2. *il existe un ouvert non vide U de X tel que $\forall x \in U$ on a $\dim\, T_x(X) = \dim\, X$.*

Nouveaux résultats concernant la codimension des stabilisateurs Énonçons à présent notre résultat concernant la codimension du stabilisateur G_W dans le cas général où $V \in \{\mathrm{T}_\ell, \mathrm{V}_\ell, \mathrm{T}_\lambda, \mathrm{V}_\lambda\}$ et $\phi \in \{\phi_{\ell^\infty}, \phi^\circ_{\ell^\infty}, \phi_{\lambda^\infty}, \phi^\circ_{\lambda^\infty}\}$. En effet, ce calcul explicite de la codimension, n'a pas été trouvé par l'auteur dans la littérature.

Théorème 2.1.3. *Soit (V, ϕ) un espace quadratique de dimension n muni d'une forme bilinéaire non dégénérée antisymétrique. Soit W un sous espace vectoriel de V de codimension d. On considère le stabilisateur de W défini comme suit*

$$G_W = \{g \in \mathrm{O(V, \phi), g_{|W} = id_W\} \subset GL_n}.$$

Alors
$$\dim\,(G_W) = \frac{d(d-1)}{2}.$$

Preuve. On va séparer la preuve en deux parties.

Cas où $W \cap W^\perp = \{0\}$ Dans ce cas on sait que $V = W \oplus W^\perp$. Où W est un sous-espace vectoriel de V de dimension $r = n - d$: $W =< e_1, ..., e_r >$. On peut alors compléter cette base en une base de V : $\{e_1, ..., e_n\}$. On sait que $W^\perp$ est de dimension $d = n - r$. Grâce au choix de la base et au fait que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ on a que $W^{\perp} =< e_{r+1}, ..., e_n >$. Par conséquent, on déduit que :

$$G_W = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{GO_d} \end{array} \right) \right\}.$$

Par conséquent :

$$G_W \simeq \mathrm{GO}_{(\mathrm{W}^{\perp}, \phi_{|\mathrm{W}^{\perp}})}.$$

Ainsi, la dimension de G_W est :

$$\dim(G_W) = \frac{d(d-1)}{2}.$$

Cas où $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ Soit $w_1 \in W \cap W^{\perp}$ non nul, et soit $w_1^{'} \in V \setminus W$ tel que $\Pi :=< w_1, w_1^{'} >$ soit un plan hyperbolique.

Montrons par récurrence que $\dim(G_W) = \frac{d(d-1)}{2}$. Supposons que pour tout sous-espace de codimension inférieure à d on a bien le résultat voulu. Par conséquent, si on pose $W^{'} = W + \Pi$ de codimension $d^{'} = d - 1$ on a bien

$$\dim(G_{W'}) = \frac{(d^{'})(d^{'}-1)}{2}.$$

On introduit la variété suivante :

$$X := \{y \in V, Q(y) = 0 \text{ et } \forall w \in W\, \phi(w, y) = \phi(w, w_1^{'})\}.$$

Considérons l'application : $f : G_W \to X$ telle que, pour tout $g \in G_W$, on ait $f(g) = g(w_1^{'})$. Montrons que cette application est surjective. En effet si $w' \in X$, alors $Q(w') = 0$ et pour tout $w \in W$ on a $\phi(w, w') = \phi(w, w_1^{'})$. Montrons qu'il existe $g_1 \in G_W$ tel que $f(g_1) = w'$, *i.e.* $f(g_1) = g_1(w_1^{'}) = w'$.

Soit $g_1 \in \mathrm{GO}(\mathrm{V}, \phi)$ tel que $g_1(w_1) = w_1$ et $g_1(w_1^{'}) = w'$. Ainsi, g_1 définit une isométrie entre Π et $< w_1, w' >$. D'après le théorème 2.1.1 on peut prolonger g_1 en une isométrie $g : V \to V$. Par conséquent $g \in G_W$ (car $g(w_1) = w_1$) et $f(g) = g(w_1^{'}) = w'$. Ainsi, pour tout $w' \in X$ il existe $g \in G_W$ tel que $f(g) = w'$, ce qui montre bien que f est surjective.

D'après le théorème 2.1.2, appliqué à f, on déduit que la dimension du stabilisateur de W est la suivante :

$$\dim G_W = \dim X + \dim G_{W+\Pi},$$

où les fibres de f sont des cosets de $G_{W+\Pi}$.

Déterminons dans un premier temps la dimension de X. Pour cela on introduit l'espace tangent de X en $y \in V$:

$$T_y(X) = \{h \in V, \phi(y,h) = 0 \text{ et } \forall w \in W,\ \phi(w,h) = 0\}.$$

On remarque que les $r+1$ équations sont indépendantes. Ainsi, d'après la proposition 2.1.1 on a

$$\dim X = \dim T_y(X) = n - (r+1) = d - 1.$$

On conclut alors que

$$\dim G_W = d - 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d(d-1)}{2}.$$

□

De façon équivalente on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.4. *Soit (V, ϕ) un espace symplectique de dimension n muni d'une forme bilinéaire non dégénérée antisymétrique. Soit W un sous espace vectoriel de V de codimension d. On considère le stabilisateur de W défini comme suit*

$$G_W = \{g \in \mathrm{Sp(V,\phi), g_{|W} = id_W\} \subset GL_n}.$$

Alors,

$$\dim(G_W) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Preuve. En effet, il suffit de remarquer que ce théorème est une reformulation (en zoom out) du [HiRa12, Lemme 2.24]. L'argument utilisé dans ce dernier article est le fait que les stabilisateurs en question sont conjugués sur $\mathbb{F}_\ell$ à des sous-groupes $P_{r,s}$. Adaptons les calculs dans notre cas.

Soit $d := \operatorname{codim}(W) = 2g - r$, ainsi

$$\dim G_W = \frac{d(d+1)}{2} = \frac{(2g-r)(2g-r+1)}{2}.$$

On remarque que

$$\operatorname{codim} G_W = \frac{2g(2g+1)}{2} - \dim G_W = \left(2g + \frac{1}{2} - \frac{r}{2}\right) \cdot r.$$

Cette dernière égalité coïncide avec celle donnée dans les remarques "numériques" du [HiRa16, Paragraphe 6, Remarque 1), p.1871] en remplaçant r par $r+s$.

□

On peut à présent adapter les théorèmes précédents dans le cas où $V = \mathrm{V}_\ell(A)$ et $\phi^\circ_{\ell^\infty} : \mathrm{V}_\ell \times \mathrm{V}_\ell \to E_\ell$

Théorème 2.1.5. *Soit A une variété abélienne simple de type III de dimension g. On considère l'espace quadratique $(\mathrm{V}_\ell(A), \phi^\circ_{\ell\infty})$ où $\phi^\circ_{\ell\infty} : \mathrm{V}_\ell \times \mathrm{V}_\ell \to E_\ell$ est une forme bilinéaire antisymétrique .*

Soit W un $\mathbb{Q}_\ell$-sous espace vectoriel de $\mathrm{V}_\ell(A)$ de codimension d. On considère le stabilisateur de W défini comme suit

$$G_W = \{g \in \mathrm{O}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})), \mathrm{g}_{|\mathrm{W}} = \mathrm{id}_\mathrm{W}\} \subset \mathrm{GL}_{2\mathrm{g}}(\mathbb{Q}_\ell).$$

Alors

$$\dim(G_W) = \frac{d(d-1)}{2}.$$

Remarque. Dans le but de déterminer l'invariant $\gamma(A)$ pour un produit de variétés abéliennes de type I, II et III la codimension des stabilisateurs doit être connue pour tous les types de variétés abéliennes. En effet le théorème 2.1.5 donne cette codimension lorsque l'un des facteurs A_i est de type III. Nous allons introduire alors une variante de ce théorème lorsque la variété abélienne A_i est de type I ou II.

Théorème 2.1.6. *Soit A une variété abélienne simple de type I, ou II et de dimension g. On considère l'espace symplectique $(\mathrm{V}_\ell(A), \phi^\circ_{\ell\infty})$ où $\phi^\circ_{\ell\infty} : \mathrm{V}_\ell \times \mathrm{V}_\ell \to E_\ell$ est une forme bilinéaire antisymétrique .*

Soit W un $\mathbb{Q}_\ell$-sous espace vectoriel de $\mathrm{V}_\ell(A)$ de codimension d. On considère le stabilisateur de W défini par $G_W = \{g \in \mathrm{Sp}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})), \mathrm{g}_{|\mathrm{W}} = \mathrm{id}_\mathrm{W}\} \subset \mathrm{GL}_{2\mathrm{g}}(\mathbb{Q}_\ell)$. Alors

$$\dim(G_W) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

On peut résumer les théorèmes 2.1.5 et 2.1.6 dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.7. *Soit A une variété abélienne simple de type I, II (resp. type III) et de dimension g. On considère l'espace symplectique (resp. quadratique) $(\mathrm{V}_\ell(A), \phi^\circ_{\ell\infty})$ où $\phi^\circ_{\ell\infty} : \mathrm{V}_\ell \times \mathrm{V}_\ell \to E_\ell$ est une forme bilinéaire antisymétrique.*

Soit W un $\mathbb{Q}_\ell$-sous espace vectoriel de $\mathrm{V}_\ell(A)$ de codimension d. On considère le stabilisateur de W défini par $G_W = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})), \mathrm{g}_{|\mathrm{W}} = \mathrm{id}_\mathrm{W}\} \subset \mathrm{GL}_{2\mathrm{g}}(\mathbb{Q}_\ell)$ où $G = \mathrm{Sp}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A}))$ (resp. $G = O(\mathrm{V}_\ell(A))$). Alors

$$\dim(G_W) = \frac{d(d+\epsilon)}{2},$$

où

$$\epsilon = \begin{cases} 1 \text{ type I et II}, \\ -1 \text{ type III}. \end{cases}$$

2.1.2 Lemmes de comptage

Le but de cette section est de déterminer $(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$, où le groupe algébrique G est le groupe de Hodge. On a donc abordé le problème en deux étapes. Dans un premier temps on s'est intéressé à la lissité sur $\mathbb{Z}_\ell$ des stabilisateurs qui interviennent dans la description de $G(H)$, en particulier, on sait que cela est vrai pour tout nombre premier suffisament grand (voir [Lom15b, Lemme 2.13]). Ensuite grâce à des méthodes développées par Serre, Oesterlé et Robba on a estimé directement cet indice (voir [Oes82, Ser81]).

Lemme concernant la lissité des stabilisateurs

Lemme 2.1.2. *([Lom15b, Lemme 2.13]) Il existe un nombre premier $\ell_0 = \ell_0(A, K)$ tel que, pour tout $\ell \geq \ell_0$ on a que pour tout module $\hat{H} \subset \mathrm{T}_\ell(A)$ l'adhérence de Zariski du stabilisateur $G_{\hat{H}}$ est lisse sur $\mathbb{Z}_\ell$.*

Remarque. — Si U est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$, l'adhérence de Zariski de U est le plus petit $\mathbb{Q}_\ell$-sous groupe algébrique $\overline{U}^{\mathrm{Zar}}$ de $\mathrm{GL}_{2g,\mathbb{Q}_\ell}$ qui contient U. Si G est un $\mathbb{Q}_\ell$-sous groupe algébrique on peut définir sa clôture schématique dans $GL_{2g,\mathbb{Z}_\ell}$.
— Rappelons que si l'on pose $W = \hat{H} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ le stabilisateur $G_{\hat{H}}$ de $\hat{H}$ est le même que celui de W noté $G_W/$

On renvoie le lecteur à [HiRa12, Lemme 2.1] pour la preuve du lemme suivant.

Lemme 2.1.3 (Hindry, Ratazzi)**.** *Soit $G/\mathbb{Z}_\ell$ un sous-groupe algébrique de GL_n, de dimension d, tel que la réduction de G sur $\mathbb{F}_\ell$ est un groupe lisse. On a*

$$\forall m \geq 1, \quad |G(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})| = \ell^{(m-1)d}|G(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})|.$$

On rappelle que le but est de déterminer $(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$. Afin d'énoncer notre premier lemme, on introduit quelques notations. En effet, ce lemme découle des résultats suivants : [HiRa12, Lemme 2.4] et [Lom15b, Lemme 2.13].

Soient A une variété abélienne de dimension g et $\ell \notin \mathcal{S}$ un nombre premier. Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ un sous-groupe de dimension r. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$, et on a

$$H = \prod_{i=1}^{t} (\mathbb{Z}/\ell^{m^i}\mathbb{Z})^{\alpha_i} \subset \mathrm{A}[\ell^n], \tag{2.2}$$

où $0 < m^t < ... < m^1$ est une suite décroissante d'entiers et $1 \leq t \leq 2g$.

On peut introduire de façon équivalente une suite croissante d'entiers $m_i = m^{t-(i-1)}$, où $m_1 = m^t$ et $m_t = m^1$. On a alors

$$H = \prod_{i=1}^{t} (\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-(i-1)}}\mathbb{Z})^{\alpha_i} \subset \mathrm{A}[\ell^n]. \tag{2.3}$$

Comme au début du chapitre 2, on peut associer à chaque sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ une filtration de sous-modules de $\mathrm{T}_\ell(A)$: $W_t \subset ... \subset W_1$. Ou de façon équivalente on a les sous-groupes V_i définis comme suit :

$$V_i := \prod_{k=1}^{t-(i-1)} (\mathbb{Z}/\ell^{m^k}\mathbb{Z})^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^{t-(i-1)} (\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-(k-1)}}\mathbb{Z})^{\alpha_k},$$

tels que $V_t \subset ... \subset V_1$, où $V_1 = H$ et $V_t = (\mathbb{Z}/\ell^{m^1}\mathbb{Z})^{\alpha_1} = (\mathbb{Z}/\ell^{m_t}\mathbb{Z})^{\alpha_1}$.

On note $\hat{V}_i$ un module associé à V_i non canoniquement et $G_{\hat{V}_i}$ sont stabilisateur. Ceci nous permet de décrire le stabilisateur $G(H)$ plus en détail :

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_1} \mod \ell^{m^t}, \dots, M \in G_{\hat{V}_t} \mod \ell^{m^1}\},$$

ou encore

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_i} \mod \ell^{m^{t-(i-1)}}\, \forall\, i \in [\![1, t]\!]\}.$$

En fonction des entiers m_i, le stabilisateur peut être décrit par

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_i} \mod \ell^{m_i}\, \forall\, i \in [\![1, t]\!]\}.$$

Notons $g_i = \dim G_{\hat{V}_i}$ et $d_i = \operatorname{codim} G_{\hat{V}_i}$. On introduit une notation qui relie $G(H)$ aux entiers $0 < m_1 < ... < m_t$, pour tout $1 \leq t \leq 2g$:

$$H(m_1, ..., m_t) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_i} \mod \ell^{m_i}\, \forall\, i \in [\![1, t]\!]\}$$

Lemme 2.1.4. *Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$ de* GL. *Soit t un entier non nul et soient $G_{\hat{V}_1} \subset ... \subset G_{\hat{V}_t}$ une suite de sous-groupes algébriques sur $\mathbb{Z}_\ell$ de $G_{\mathbb{Z}_\ell}$ définis comme précédemment tels que $d_i = \operatorname{codim} G_{\hat{V}_i}$.*

Pour tout ℓ suffisamment grand les stabilisateur $G_{\hat{V}_i}$ sont lisses sur $\mathbb{Z}_\ell$ et par conséquent on a, à des constantes multiplicatives près (ne dépendant que de A), l'égalité suivante :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : H(m_1, ..., m_t)) \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^t d_i \left(m_i - m_{i-1}\right)}.$$

Preuve. Grâce au lemme 2.1.2 on sait qu'il existe un nombre premier ℓ_0 tel que pour tout $\ell > \ell_0$ les stabilisateurs $G_{\hat{V}_1}$ sont lisses sur $\mathbb{Z}_\ell$ et par conséquent on peut adapter le [HiRa12, Lemme 2.4] pour déduire la valeur de $(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$. Considérons le morphisme suivant :

$$\text{réd} : G(\mathbb{Z}_\ell) \to G(\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z}).$$

On introduit, pour tout $2 \leq t \leq 2g$, les groupes

$$G(m_1, ..., m_t) = \{M \in G_{\hat{V}_t}(\mathbb{Z}/\ell^{m_t}\mathbb{Z}), M \in G_{\hat{V}_t} \mod \ell^{m_i},\, \forall\, i \in [\![1, t-1]\!]\},$$

comme étant l'image de $H(m_1, ..., m_t)$ par le morphisme réd.

Montrons par récurrence sur l'entier t que

$$|G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1,...,m_t)| \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.$$

On se place dans le cas où $t=1$. Ainsi, $H(m_1)=\{M\in G(\mathbb{Z}_\ell),\ M\in G_{\hat{V}_1} \mod \ell^{m_1}\}$. Étant donné que l'on a supposé que G était lisse, le morphisme suivant est surjectif

$$\text{réd} : G(\mathbb{Z}_\ell)\to G(\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z}).$$

De plus on a l'isomorphisme $G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1)\simeq G(\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})/G_{\hat{V}_1}(\mathbb{Z}/\ell^{m_1}\mathbb{Z})$, par conséquent grâce au lemme 2.1.3 on a

$$|G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1)| \gg\ll \ell^{(\dim G-\dim G_{\hat{V}_1})(m_1)}=\ell^{d_1m_1}.$$

On suppose que c'est vrai au rang $t-1$, on a alors l'égalité suivante :

$$|G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1,...,m_{t-1})| \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.$$

ou de façon équivalente

$$|G(\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z})/G(m_1,...,m_{t-1})| \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.$$

car $G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1,...,m_{t-1})\simeq G(\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z})/G(m_1,...,m_{t-1})$.

Montrons que c'est encore vrai au rang t. Pour cela on introduit le morphisme surjectif ($G_{\hat{V}_t}$ est lisse)

$$\phi : G_{\hat{V}_t}(Z/\ell^{m_t}\mathbb{Z})\to G_{\hat{V}_t}(\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z}),$$

il y a donc un isomorphisme entre $G_{\hat{V}_t}(Z/\ell^{m_t}\mathbb{Z})/Ker(\phi)$ et $G_{\hat{V}_t}(Z/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z})$, par conséquent

$$|Ker(\phi)|=|G_{\hat{V}_t}(Z/\ell^{m_t}\mathbb{Z})|/|G_{\hat{V}_t}(Z/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z})|=\ell^{m_tg_t-m_{t-1}g_t}=\ell^{g_t(m_t-m_{t-1})}.$$

Le morphisme ϕ envoie $G(m_1,...,m_t)$ sur $G(m_1,...,m_{t-1})$, donc

$$|G(m_1,...,m_t)|/|Ker(\phi)|=|G(m_1,...,m_{t-1})|,$$

ainsi, $|G(m_1,...,m_t)|=\ell^{g_t(m_t-m_{t-1})}|G(m_1,...,m_{t-1})|$ et d'après l'hypothèse de récurrence on sait que

$$|G(\mathbb{Z}/\ell^{m_{t-1}}\mathbb{Z})/G(m_1,...,m_{t-1})| \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}$$

et par conséquent

$$|G(m_1,...,m_t)| \gg\ll \ell^{m_{t-1}\dim G}\ell^{-\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}|G(m_1,...,m_t)| &\gg\ll \ell^{g_t(m_t-m_{t-1})}\ell^{m_{t-1}\dim G}\ell^{-\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)} \\ &\gg\ll \ell^{g_tm_t-g_tm_{t-1}+m_{t-1}\dim G}\ell^{-\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}g_tm_t - g_tm_{t-1} + \dim Gm_{t-1} &= g_tm_t + d_tm_{t-1} \\ &= m_t\dim G - m_t\dim G + g_tm_t + d_tm_{t-1} \\ &= m_t\dim G - d_t(m_t - m_{t-1}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|G(m_1,...,m_t)| &\gg\ll \ell^{m_t\dim G}\ell^{-d_t(m_t-m_{t-1})}\ell^{-\sum_{i=1}^{t-1} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)} \\ &\gg\ll |G(\mathbb{Z}/\ell^{m_t}\mathbb{Z})|\ell^{-\sum_{i=1}^{t} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|G(\mathbb{Z}/\ell^{m_t}\mathbb{Z})/G(m_1,...,m_t)| \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)},$$

et étant donné que $|G(\mathbb{Z}_\ell)/H(m_1,...,m_t)| = |G(\mathbb{Z}/\ell^{m_t}\mathbb{Z})/G(m_1,...,m_t)|$ on obtient finalement notre résultat pour tout nombre premier ℓ assez grand :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : H(m_1,...,m_t)) \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t} d_i\left(m_i-m_{i-1}\right)}.$$

□

Lemme concernant l'indice du stabilisateurs dans $G(\mathbb{Z}_\ell)$ Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ un sous-groupe finis, le but de ce paragraphe sera d'estimer l'indice suivant :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)).$$

Comme au début du chapitre 2 on associe à chaque sous-groupe finis $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ une filtration de sous-modules $W_t \subset ... \subset W_1$ de $\mathrm{T}_\ell(A)$ et on note $\hat{H} = W_1$. Afin d'estimer l'indice précédent on introduit les notations suivantes : soit $\{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_{2g}\}$ une $\mathbb{Z}_\ell$-base fixée de $\mathrm{T}_\ell(A)$. On peut munir le module $\hat{H}$ d'une $\mathbb{Z}_\ell$-base $\{\hat{h}_1, ..., \hat{h}_r\}$ et compléter cette base en une $\mathbb{Z}_\ell$-base $\{h_1, ..., h_{2g}\}$ telle que $\forall i \in [\![1, r]\!]$ on a :

$$\hat{h}_i = \sum_{j=1}^{2g} h_{i,j}\hat{e}_j.$$

On sait que

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\ M\hat{h}_i = \hat{h}_i,\ \forall\, i \in [\![1,r]\!]\}.$$

On peut à présent définir s polynômes dans $\mathbb{Z}_\ell[X_1, ..., X_{(2g)^2}]$, où s est un entier qui sera défini ultérieurement.

Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ on a l'équivalence suivante où $M \in G(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ telle que $M = (a_{ij})_{i,j}$.

$$M\hat{h}_i - \hat{h}_i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{2g} a_{1j}h_{i,j} - h_{i,1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2g} a_{2gj}h_{i,j} - h_{i,2g} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ il y a $2g$ équations, soit au total $s = 2gr$ équations. On peut à présent introduire les s polynômes à $(2g)^2$ variables définis sur $\mathbb{Z}_\ell$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_{2g(i-1)+1}(X_1, ..., X_{(2g)^2}) = (X_1 - 1)h_{i,1} + \displaystyle\sum_{j=2}^{2g} X_j h_{i,j} \\ \quad\vdots \\ f_{2g(i-1)+k}(X_1, ..., X_{(2g)^2}) = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2g} X_{(k-1)2g+j}h_{i,j} + (X_{(k-1)2g+k} - 1)h_{i,k} \\ \quad\vdots \\ f_{2gi}(X_1, ..., X_{(2g)^2}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2g-1} X_{(2g-1)2g+j}h_{i,j} + (X_{(2g)^2} - 1)h_{i,2g}. \end{cases}$$

Soit $M \in G(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell)$ telle que $M = (a_{ij})_{i,j}$. On introduit l'inclusion suivante :

$$\begin{array}{cccc} v : & G(\mathbb{Z}_\ell) & \to & \mathbb{Z}_\ell^{(2g)^2} \\ & M = (a_{ij})_{i,j} & \mapsto & (a_{11}, ..., a_{12g}, \ldots, a_{2g1}, \ldots, a_{2g2g}) \end{array}$$

Ainsi,

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\ f_k(v(M)) = 0,\ \forall\, k \in [\![1,s]\!]\}.$$

Remarque. On constate que $G(H)$ est entièrement déterminé par s polynômes linéaires par rapport aux variables X_j et par rapport aux coefficients des vecteurs de la $\mathbb{Z}_\ell$-base de $\hat{H}$. De même le fait que $M \in G(\mathbb{Z}_\ell)$ impose certaines conditions sur les coefficients de la matrice, comme par exemple le fait que $det(M) \neq 0$ dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Pour des facilités de notations on pose $Y = G(H)$, ainsi on a

$$Y \subset G(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell).$$

Étant donné que l'on vient de définir $G(H)$ comme l'ensemble des zéros de polynômes à $(2g)^2$ variables on a l'inclusion suivante :

$$Y \subset \mathbb{Z}_\ell^N \qquad \text{où} \qquad N = 4g^2. \tag{2.4}$$

On pose $X_m := (\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})^N$ et on introduit le sous groupe fini suivant :

$$Y_m := im(\mathrm{red : Y \to X_m}).$$

Comme ça a été signalé par Serre [Ser81, Remarque p. 346], on peut utiliser les méthodes développées par Oesterlé et Robba (voir [Oes82, Théorème 1]) pour obtenir une meilleure estimation de l'indice $(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$ que celle donnée par [Ser81, Théorème 8]. Reprenons ici ce dernier énoncé avec les notations définies précédemment :

Théorème 2.1.8 (Oesterlé)**.** *Soit Y une variété algébrique définie par des équations de degré inférieur ou égal à un entier non nul d telle que $Y \subset \mathbb{A}^N$ soit de dimension r. Alors pour tout $m \geq 0$ on a*

$$|Y_m| \leq c(N, d, r)\ell^{mr}.$$

Soit $\widetilde{Y_m} := \{x \in X_m, f_k(x) \equiv 0 \mod \ell^m, \forall k \in [\![1, s]\!]\}$. On a alors l'inclusion suivante :

$$Y_m \subset \widetilde{Y_m}. \tag{2.5}$$

Dans le cas où Y est une variété lisse sur $\mathbb{Z}_\ell$ on a en fait une égalité $Y_m = \widetilde{Y_m}$ (*i.e.* par exemple dans le cas où $\ell \geq \ell_0$). Cependant tout au long de ce paragraphe on se place dans le cas où $\ell < \ell_0$ et donc on ne sait pas si pour tout sous-groupe H le stabilisateur est lisse sur $\mathbb{Z}_\ell$, par conséquent on se contentera de l'inclusion.

Énonçons à présent notre résultat. On voudrait pouvoir estimer $(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))$ lorsque ℓ est petit (en particulier $\ell \leq \ell_0$). Pour cela on estimera dans un premier temps le cardinal de Y_m :

Lemme 2.1.5. *Soit H un sous-groupe de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$. On note $Y = G(H)$. Ainsi, pour tout $m \geq 1$ il existe des constantes c_1 et c_2 dépendant éventuellement de ℓ telles que*

$$c_1\ell^{m \dim G(H)} \leq |Y_m| \leq c_2\ell^{m \dim G(H)},$$

où $\dim G(H) = \frac{(2g-r)(2g-r-1)}{2}$.

Preuve. On séparera la preuve en deux parties : dans un premier temps on donnera une borne supérieure et on se concentrera dans un second temps sur la borne inférieure.

On peut donc appliquer le théorème 2.1.8 à notre variété Y définie par un nombre fini de polynômes à N variables et à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$. Ainsi, pour tout $m \geq 0$ on a

$$|Y_m| \leq c_2 \ell^{m \dim G(H)}. \tag{2.6}$$

Remarque. La constante c_2 dépend uniquement de degré des polynômes qui définissent $Y = GH)$, de $N = 4g^2$ et de la dimension de $G(H)$ notée r mais pas du nombre premier ℓ.

Donnons à présent une borne inférieure. L'objectif de cette partie est de prouver les inégalités suivantes pour tout $m \geq 0$:

$$c(G,\ell)\ell^{m \dim G} \underset{\boxed{1}}{\leq} |G_m| \underset{\boxed{2}}{\leq} |Y_m| \times |(G/Y)_m| \underset{\boxed{3}}{\leq} c(Y,G,N)\ell^{m \dim(G/Y)} \times |Y_m| \tag{2.7}$$

ce qui impliquera que

$$c_1(g,r,\ell)\ell^{m \dim G(\hat{H})} \leq |Y_m|, \tag{2.8}$$

où $c_1(g,r,\ell) = \frac{c(G,\ell)}{c(Y,G,N)}$.

Détaillons à présent chaque étape.

1. Dans le but d'obtenir la première inégalité on utilise une version plus faible du [Ser81, Théorème 9] qui peut être reformulé comme suit :

   $$\forall m \geq 0 \qquad \text{on a} \qquad c(G,\ell)\ell^{m \dim G} \leq |G_m| \tag{2.9}$$

   où la constante $c(G,\ell)$ dépend uniquement de G et du nombre premier ℓ, plus particulièrement elle est liée au volume de G.

   Remarque. En effet, le [Ser81, Théorème 9] affirme que, pour tout m assez grand ($m > m_0(G,\ell)$), on a : $c(G,\ell)\ell^{m \dim G} = |G_m|$, avec $c(G,\ell) = vol(G_m)$.

Montrons à présent les deux dernières inégalités. Pour cela on considère dans un premier temps la Grassmannienne $X = Gr(r, \mathrm{V}_\ell(A))$ des sous-espaces vectoriels de dimension r dans $\mathrm{V}_\ell(A)$. On rappelle que le sous-module $\hat{H} \subset \mathrm{T}_\ell(A)$ est associé au $\mathbb{Q}_\ell$-sous-espace vectoriel $W \subset \mathrm{V}_\ell(A)$. Soit $x_W = [\bigwedge^r W]$ le point dans X correspondant au sous-espace W. Faisons à présent quelques remarques. En effet, on a l'inclusion et le lemme suivant :

$$G(W) \subset \{g \in G, g(W) = W\}.$$

Lemme 2.1.6. *Pour tout sous-espace vectoriel W de dimension r et pour tout $g \in G$ on a*

$$g(W) \subset W \Leftrightarrow \wedge^r g(x_W) = x_W.$$

Sous ces notations, on peut énoncer le théorème de Chevalley (voir [Hum81, Théorème p. 80])

Théorème 2.1.9 (Chevalley)**.** *Il existe un espace vectoriel U et une droite $L \subset U$ tels qu'il existe une représentation rationnelle $\rho : G \to \mathrm{GL}(U)$ telle que $G(W) = Stab_L$.*

Remarque. L'espace vectoriel U est entièrement déterminé par la Grassmannienne X, pour plus de détails, voir [Hum81, Théorème p. 80].

Le théorème de Chevalley implique qu'il existe une droite L de U et une action de G sur $\mathbb{P}(U)$

$$G \times \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U),$$

telle que l'orbite de $[L]$ s'identifie à $G/G(W)$ car $G(W) = Stab_L$.

On déduit le corollaire suivant

Corollaire 2.1.1. *Le quotient $G/G(W)$ est une sous-variété localement fermée de $\mathbb{P}(U)$.*

Notons à présent

$$\begin{aligned} \psi : G &\to Z \subset \mathbb{P}(U) \\ g &\mapsto g \cdot [L] \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $Z = \overline{\psi(G)}$ est un fermé car $Z^\circ = \psi(G)$ est un ouvert dans son adhérence.

On a ainsi l'isomorphisme

$$G/G(W) \simeq Z^\circ \subset Z. \tag{2.11}$$

Remarque. On remarque que notre variété Z est en fait une variété quasi-projective, cependant pour utiliser le théorème d'Oesterlé on a besoin d'utiliser des variétés affines. On peut sans aucun problème recouvrir notre variété par des ouverts affines et appliquer ensuite le théorème d'Oesterlé à ces ouverts. En effet, la modification apparaitra au niveau de la constante.

Soit ℓ un nombre premier, on a pour tout $m \geq 0$ le morphisme suivant :

$$\psi_{\ell^m} : G_m \to Z_m^\circ \tag{2.12}$$

Grâce à l'isomorphisme (2.11) on sait que

$$(G/G(W))_m \simeq Z_m^\circ. \tag{2.13}$$

On peut à présent déterminer les deux dernières inégalités.

2. Pour tout $m \geq 0$ on a l'égalité :

$$|G_m| = \sum_{x \in Z_m^\circ} |\psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \cap G_m|. \tag{2.14}$$

Or on sait que $\psi^{-1}\{x\} \cap G_m$ est un espace homogène sous $G(W)$, ce qui implique que $\psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \cap G_m$ l'est aussi sous Y_m. Par conséquent on a la surjection suivante, où dans le cas où $\psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \neq \emptyset$ on a $y_0 \in \psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \cap G_m$

$$\begin{aligned} Y_m &\twoheadrightarrow \psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \cap G_m \\ g &\mapsto g \cdot y_0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

ainsi

$$|\psi_{\ell^m}^{-1}\{x\} \cap G_m| \leq |Y_m|. \tag{2.16}$$

On déduit alors des équations (2.14) et (2.16) l'inégalité

$$|G_m| \leq |Z_m^\circ| \times |Y_m|, \tag{2.17}$$

qui est équivalente à l'inégalité numéro 2.

3. Pour obtenir la dernière inégalité, on doit montrer que pour tout $m \geq 0$ on a

$$|Z_m^\circ| \leq c(Y, G, N)\ell^{m \dim Z^\circ}. \tag{2.18}$$

Pour cela on utilise à nouveau le théorème 2.1.8 et le fait que $G/Y \simeq Z^\circ \subset \mathbb{P}(U)$ est entièrement déterminé par des équations de degré fini.

On vient donc de montrer que pour tout sous-groupe fini $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on a, avec les notations $Y = G(H)$ et $Y_m = im(Y \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}))$

$$\forall m \geq 0 \, c_1(g, r, \ell)\ell^{m \dim Y} \leq |Y_m| \leq c_2(g, r, Y)\ell^{m \dim Y}.$$

□

Remarque. On peut résumer les lemmes 2.1.4 et 2.1.5 de la façon suivante ;

— $c_1\ell^{\sum_{i=1}^t d_i\left(m_i - m_{i-1}\right)} \leq (G(\mathbb{Z}_\ell) : H(m_1, ..., m_t)) \leq c_2\ell^{\sum_{i=1}^t d_i\left(m_i - m_{i-1}\right)}$, avec c_1 et c_2 des constantes indépendantes des entiers m_i et de ℓ pour $\ell \geq \ell_0$.

— $c_1\ell^{\sum_{i=1}^t d_i\left(m_i - m_{i-1}\right)} \leq (G(\mathbb{Z}_\ell) : H(m_1, ..., m_t)) \leq c_2\ell^{\sum_{i=1}^t d_i\left(m_i - m_{i-1}\right)}$, avec c_1 et c_2 des constantes indépendantes des entiers m_i et dépendantes éventuellement de ℓ pour $\ell < \ell_0$.

Par conséquent notre résultat devient indépendant du nombre premier ℓ. On énoncera ce résultat dans le paragraphe suivant.

Fusion des deux lemmes précédents et applications aux cas traités dans les sections 4.1 et 4.2 On rappelle que les groupes $G_{\hat{V}_1}, \ldots, G_{\hat{V}_t}$ sont les stabilisateurs des sous-modules $\hat{V}_1, ..., \hat{V}_t$ définis précédemment par des équations de degré borné. Les stabilisateurs $G_{\hat{V}_i}$ sont des sous-groupes algébriques sur $\mathbb{Z}_\ell$ de $G_{\mathbb{Z}_\ell}$ définis comme précédemment tels que $d_i = \operatorname{codim} G_{\hat{V}_i}$.

Lemme 2.1.7. *Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$ de* GL. *Soit t un entier non nul et soient $\hat{V}_t \subset ... \subset \hat{V}_1$ une suite de sous-modules et $G_{\hat{V}_i}$ leur stabilisateur associé. On note* $d_i = \operatorname{codim} G_{\hat{V}_i}$.

On a l'égalité $G(H) = H(m_1, ..., m_t)$ et pour tout nombre premier ℓ on a, à des constantes multiplicatives près (ne dépendant que de A), l'égalité suivante :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : H(m_1, ..., m_t)) \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t} d_i \left(m_i - m_{i-1}\right)}.$$

On introduit à présent les lemmes qui seront utiles pour les preuves des théorèmes principaux. Le lemme suivant, est une reformulation du lemme 2.1.7 adapté aux sections 4.1 et 4.2.

Lemme 2.1.8. *Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$ de* GL. *Soit t un entier non nul et soient $\hat{V}_t \subset ... \subset \hat{V}_1$ une suite de sous-modules et $G_{\hat{V}_i}$ leur stabilisateur associé.*

On note $d_i := \operatorname{codim}_{G_{\mathbb{Z}_\ell}} G_{\hat{V}_i}$ pour tout $i \in [\![1, t]\!]$. Soit $1 \leq m^t < ... < m^1$ une suite strictement décroissante d'entiers. Le stabilisateur $G(H)$ est défini par

$$G(H) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_i} \mod \ell^{m^{t-(i-1)}}\, \forall\, i \in [\![1, t]\!]\}.$$

Pour tout ℓ on a, à des constantes multiplicatives près (ne dépendant que de A), l'égalité :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \gg\ll \ell^{\sum_{i=1}^{t} d_i \left(m^{t-(i-1)} - m^{t-(i-1)+1}\right)}.$$

Avant d'énoncer les lemmes suivants, on introduit quelques notations. Soit A_i une variété abélienne simple de dimension g_i et $t_i \leq 2g_i$. Soit H_i (resp. $H_{\lambda,i}$) un sous-groupe de $\mathrm{A}_i[\ell^\infty]$ (resp. $\mathrm{A}_i[\lambda^\infty]$). Soit $\hat{V}_{i,j}$ des sous-modules, on notera $G_{\hat{V}_{i,j}}$ le stabilisateur de $\hat{V}_{i,j}$ dans $G_{\mathbb{Z}_\ell}$ (resp. $G_{\mathcal{O}_{\lambda,i}}$). Pour plus de détails voir sections 4.1 et 4.2.

Lemme 2.1.9. *Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$ de* GL. *Soient $i \in [\![1, d]\!]$ et $\hat{V}_{i,t} \subset ... \subset \hat{V}_{i,1}$ une suite de sous-modules et $G_{\hat{V}_{i,1}} \subset ... \subset G_{\hat{V}_{i,t_i}}$ leur stabilisateurs associés.*

On note $d_{i,j} := \operatorname{codim}_{G_{\mathbb{Z}_\ell}} G_{\hat{V}_{i,j}}$ pour tout $j \in [\![1, t_i]\!]$. Soit $1 \leq m_i^{t_i} < ... < m_i^1$ une suite strictement décroissante d'entiers. Le stabilisateur $G(H_i)$ est défini pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ par

$$G(H_i) = \{M \in G(\mathbb{Z}_\ell),\, M \in G_{\hat{V}_{i,j}} \mod \ell^{m_i^{t_i-(j-1)}}\, \forall\, j \in [\![1, t_i]\!]\}.$$

Pour tout ℓ on a, à des constantes multiplicatives près (ne dépendant que de A), l'égalité :

$$(G(\mathbb{Z}_\ell) : G(H_i)) \gg\ll \ell^{\sum_{j=1}^{t_i} d_{i,j} \left(m_i^{t_i-(j-1)} - m_i^{t_i-(j-1)+1}\right)}.$$

Lemme 2.1.10. *Soit G un sous-groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$ de* GL. *Soient $\hat{V}_{t_\lambda} \subset ... \subset \hat{V}_1$ une suite de sous-modules et $G_{\hat{V}_i}$ leur stabilisateur associé.*

On note $d_i := \operatorname{codim}_{G_{\mathbb{Z}_\ell}} G_{\hat{V}_i}$ *pour tout* $i \in [\![1, t_\lambda]\!]$. *Soit* $1 \leq m_\lambda^{t_\lambda} < ... < m_\lambda^1$ *une suite strictement décroissante d'entiers. Le stabilisateur* $G(H_\lambda)$ *est défini pour tout* $\lambda|\ell$ *par*

$$G(H_\lambda) = \{M \in G(\mathcal{O}_\lambda),\, M \in G_{\hat{V}_i} \mod \lambda^{m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}}\, \forall\, i \in [\![1, t_\lambda]\!]\}.$$

Pour tout ℓ *on a, à des constantes multiplicatives près (ne dépendant que de* A*), l'égalité :*

$$(G(\mathcal{O}_\lambda) : G(H_\lambda)) \gg\ll (\sharp\mathbb{F}_\lambda)^{\sum_{i=1}^{t_\lambda} d_i \left(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)} - m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1}\right)}.$$

Lemme 2.1.11. *Soit* G *un sous-groupe algébrique sur* $\mathbb{Z}$ *de* GL. *Soient* $(\lambda, i) \in I_\ell$ *et* $\hat{V}_{i,t_{\lambda,i}} \subset ... \subset \hat{V}_{i,1}$ *une suite de sous-modules et* $G_{\hat{V}_{i,1}} \subset ... \subset G_{\hat{V}_{i,t_{\lambda,i}}}$ *leur stabilisateurs associés.*

On note $d_{i,j} := \operatorname{codim}_{G_{\mathcal{O}_{\lambda,i}}} G_{\hat{V}_{i,j}}$ *pour tout* $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. *Soit* $1 \leq m^{t_{\lambda,i}} < ... < m^1$ *une suite strictement décroissante d'entiers qui dépendent de* $(\lambda, i) \in I_\ell$. *Le stabilisateur* $G(H_{\lambda,i})$ *est défini pour tout* $(\lambda, i) \in I_\ell$ *par*

$$G(H_{\lambda,i}) = \{M \in G(\mathcal{O}_{\lambda,i}),\, M \in G_{\hat{V}_{i,j}} \mod \lambda^{m^{t_{\lambda,i}-(j-1)}}\, \forall\, j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]\}.$$

Pour tout ℓ *on a, à des constantes multiplicatives près, l'égalité :*

$$(G(\mathcal{O}_{\lambda,i}) : G(H_{\lambda,i})) \gg\ll (\sharp\mathbb{F}_\lambda)^{\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} d_{i,j} \left(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1}\right)}.$$

Chapitre 3

Représentations galoisiennes

3.1 Notations

Soit A une variété abélienne simple définie sur un corps de nombres K de dimension g et de type III dans le sens de la classification d'Albert. Soit ϕ une polarisation fixée de A. Soit $G_K = Gal(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K. On note $D := \mathrm{End}^\circ(A) = \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ son algèbre d'endomorphismes et soit $E := Z(D)$. Étant donné que A est de type III, E est un corps totalement réel avec $[E : \mathbb{Q}] = e$ et D est une algèbre de quaternions définie sur E.

Notons $R = \mathrm{End}_E(A)$ et O_E l'anneau de entiers de E et soit ℓ un nombre premier tel qu'il ne divise pas le degré de ϕ et ne soit pas ramifié sur E (ces cas là seront traités dans l'annexe A). On considère alors les extensions :

$$
\begin{tikzcd}
D & R \\
E \arrow[u] & O_E \arrow[u] \\
\mathbb{Q} \arrow[u, "e"'] & \mathbb{Z} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
D_\ell & R_\ell \\
E_\ell \arrow[u] & \mathcal{O}_{E_\ell} \arrow[u] \\
\mathbb{Q}_\ell \arrow[u, "e"'] & \mathbb{Z}_\ell \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

où $D_\ell = D \otimes \mathbb{Q}_\ell$, $E_\ell = E \otimes \mathbb{Q}_\ell$, $R_\ell = R \otimes \mathbb{Z}_\ell$ et $\mathcal{O}_{E_\ell} = O_E \otimes \mathbb{Z}_\ell$.

Si $\lambda|\ell$, on note E_λ le complété de E pour la place λ et $\mathcal{O}_\lambda$ son anneau des entiers. Notons $k_\lambda := \mathcal{O}_\lambda/\lambda\mathcal{O}_\lambda$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_\lambda$. Ainsi, on a

$$\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda$$

.

Soit A$[\ell^n]$ le noyau de la multiplication par ℓ^n sur $A(\bar{K})$, alors le module de Tate de A

est un $\mathbb{Z}_\ell[G_K]$-module de rang $2g$ défini comme suit :

$$\mathrm{T}_\ell(A) := \varprojlim \mathrm{A}[\ell^n];$$

et

$$\mathrm{V}_\ell(A) := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

On remarque que $\mathrm{A}[\ell^n]$ et $\mathrm{T}_\ell(A)$ sont des G_K-module. On rappelle aussi qu'on a introduit au paragraphe 1.2.1 l'accouplement de Weil. Soit $A^\vee$ la variété duale de A, alors il existe une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee)$ qui est Galois équivariante, dénommée accouplement de Weil (voir [HiRa16, Section 3, paragraphe 2, p. 1857] pour plus de détails) :

$$< .,. >: \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee) \to \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}.$$

Soit $\phi : A \to A^\vee$ une polarisation quelconque de A, alors elle induit une forme bilinéaire non dégénérée antisymétrique :

$$\phi_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \stackrel{id\times\phi}{\to} \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A^\vee) \stackrel{<.,.>}{\to} \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}.$$

3.1.1 Représentations ℓ-adiques

On peut à présent introduire, pour tout nombre premier ℓ, la représentation ℓ-adique suivante :

$$\rho_\ell : \mathrm{G_K} \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_\ell(\mathrm{A})).$$

On définit le groupe algébrique $G_\ell = \overline{\rho(G_K)}^{Zar}$, autrement connu comme le groupe de monodromie ℓ-adique. De plus on sait, grâce aux travaux de Serre (voir [Ser03a, Théorème p. 16] de la lettre à K. Ribet du premier janvier 1981), qu'il existe une extension finie de K telle que pour tout nombre premier ℓ le groupe algébrique G_ℓ est connexe sur cette extension.

Théorème 3.1.1 (Serre)**.** *Il existe une extension finie K'/K telle que pour tout nombre premier ℓ le groupe algébrique G_ℓ est connexe.*

En outre, grâce au théorème de Faltings (voir [Fal83]) on sait que G_ℓ est réductif.

Également un résultat très utile pour la suite sera le critère d'indépendance des représentations ℓ-adiques de Serre (voir [Ser03b, Théorème 1 p. 34] ou [Ser13, Théorème 1]) qui affirme qu'il existe une extension finie K'/K telle que les représentations ℓ-adiques soient indépendantes sur K'. Autrement dit, pour tout nombre premier ℓ_1 et ℓ_2 les extensions $K'(A[\ell_1^\infty])/K'$ et $K'(A[\ell_2^\infty])/K'$ sont disjointes.

Théorème 3.1.2 (Serre)**.** *Il existe une extension finie K'/K telle que les représentations ℓ-adiques sont indépendantes. En d'autres termes le morphisme suivant est bijectif :*

$$Gal(K'(A(K')_{tors})/K') \to \prod_{\ell} Gal(K'(\mathrm{A}[\ell^{\infty}])/K').$$

Un corollaire immédiat du théorème 3.1.2 est le suivant :

Corollaire 3.1.1. *Soit $H \subset A(\bar{K})_{tors}$ tel que $H = \prod_{\ell} H_{\ell}$, où $H_{\ell} \subset \mathrm{A}[\ell^{\infty}]$, alors*

$$[K'(H) : K'] = \prod_{\ell}[K'(H_{\ell}) : K'].$$

On suppose dorénavant que le corps de nombres K est tel que G_{ℓ} soit connexe et tel que les représentations ℓ-adiques soient indépendantes.

On sait que les représentations ℓ-adiques sont semi-simples, après tensorisation par $\mathbb{Q}_{\ell}$ (voir [FaWü84]). En effet ce résultat est en faveur de la conjecture de semi-simplicité de Tate, pour plus de détails voir [Cad15, Paragraphe 6.4].

3.1.2 Variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz

Définition 3.1.1. *On définit le* ***groupe de Lefschetz*** *$\mathcal{L}(A)$ comme étant le groupe des similitudes symplectiques (par rapport à une polarisation fixée) qui commutent avec l'anneau d'endomorphismes D.*

Remarque. 1. Le groupe de Lefschetz ne dépend pas de la polarisation.

2. Pour tout $\sigma \in G_K$ on a $\rho_{\ell}(\sigma) \in \mathcal{L}(A)$ car $\rho_{\ell}(\sigma)$ respecte l'accouplement de Weil et commute avec $\mathrm{End}_K(A)$.
3. On remarque que $\mathcal{L}(A) = \mathbb{G}_m \cdot \mathcal{L}_0(A)$ où $\mathcal{L}_0(A)$ est le groupe spécial de Lefschetz (voir [Mil99, Definition 4.3]). En effet, Milne définit le groupe de Lefschetz comme étant notre groupe $\mathcal{L}_0(A)$.
4. Soit A est une variété abélienne simple de dimension g. Alors
   - si A est une variété abélienne de type I ou II, $\mathcal{L}(A)$ est inclus dans $\mathrm{GSp}_{2\mathrm{g}}$, le groupe des similitudes symplectiques,
   - si A est une variété abélienne de type III, $\mathcal{L}(A)$ est inclus dans $\mathrm{GO}_{2\mathrm{g}}$ le groupe des similitudes orthogonales.

   Plus particulièrement si A est une variété abélienne de type I ou II (resp. type III) on a

   $$\mathcal{L}_0(A) = Res_{E/\mathbb{Q}}\,\mathrm{Sp}_{2\mathrm{h,E}} \quad \text{resp.} \quad \mathcal{L}_0(\mathrm{A}) = \mathrm{Res}_{\mathrm{E}/\mathbb{Q}}\,\mathrm{SO}_{2\mathrm{h,E}},$$

   (voir [BGK06, Mil99]).

Définition 3.1.2. *On dira qu'une variété abélienne A est* ***pleinement de type Lefschetz*** *lorsque*

— $\mathrm{MT(A)} = \mathcal{L}(A)$ *et*
— *A vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

On peut traduire cela par les inclusions suivantes :

$$\mathrm{G}_\ell \subseteq \mathrm{MT(A)} \otimes \mathbb{Q}_\ell \subseteq \mathcal{L}(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell, \tag{3.1}$$

alors, A est pleinement de type Lefschetz si et seulement si

$$\mathrm{G}_\ell = \mathcal{L}(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Remarque. — La première inclusion de l'équation (3.1) à été démontré par Pjateckiĭ-Šapiro [PS71, Theorem 4, p 624]), Borovoĭ [Bor74] et Deligne [DMOS82, Exp I, 2.9, 2.11, 3.2].

— Quelques exemples de variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz sont présentés la section 5.

— C'est toujours utile de savoir qu'il existe des variétés abéliennes qui ont un groupe de Mumford-Tate donné et qui vérifient la conjecture de Mumford-Tate. En effet le [Noo95, Théorème 1.7] (ou bien dans [Ser03a]) affirme que pour toute variété abélienne complexe A telle que $G = \mathrm{MT(A)}$ il existe un corps de nombres K et unes variété abélienne A' définie sur K telle que $\mathrm{MT(A')} = \mathrm{G}$ et la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A'.

3.1.3 Décomposition des modules de Tate

On rappelle que $\mathrm{T}_\ell(A) = \varprojlim \mathrm{A}[\ell^n]$ et que $\mathrm{A}[\ell^n] = \mathrm{T}_\ell(A)/\ell^n\mathrm{T}_\ell(A)$ et on définit

$$\mathrm{A}[\ell^\infty] = \varinjlim \mathrm{A}[\ell^n] = \bigcup_n \mathrm{A}[\ell^n],$$

où l'union est prise dans $A(\bar{K})$

Étant donné que $\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda$ on peut décomposer $\mathrm{T}_\ell(A)$ et $\mathrm{V}_\ell(A)$ en produit de modules $\mathcal{T}_\lambda$ et de sous-espaces $\mathcal{V}_\lambda$ pour tout $\lambda|\ell$ de la façon suivante :

$$\mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda;$$

$$\mathrm{V}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{V}_\lambda,$$

où pour tout $\lambda|\ell$ on a le $\mathcal{O}_\lambda$-module $\mathcal{T}_\lambda := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathcal{O}_\lambda$ et le E_λ-espace vectoriel $\mathcal{V}_\lambda := \mathrm{V}_\ell(A) \otimes_{E_\ell} E_\lambda$.

Étant donné que ℓ est non ramifié dans E on sait qu'il existe une unique forme bilinéaire sur $\mathcal{O}_{E_\ell}$ et sur E_ℓ lorsque l'on tensorise par $\mathbb{Z}_\ell$ puis $\mathbb{Q}_\ell$.

$$\psi_\ell : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}_{E_\ell};$$

$$\psi_\ell^\circ : \mathrm{V}_\ell(A) \times \mathrm{V}_\ell(A) \to E_\ell.$$

On introduit à présent l'ensemble suivant

Définition 3.1.3. *On note $\mathcal{S}$ l'ensemble fini des nombres premier ℓ tels que ℓ soit ramifié dans $\mathcal{O}_E$ ou divise le degré de la polarisation fixé ϕ de A ou bien, dans le cas de type II ou III, l'algèbre de quaternions D soit non décomposée en $\lambda|\ell$.*

Énonçons maintenant un théorème de Banaszak, Gajda et Krasoń qui nous sera utile pour formuler la proposition qui lui suivra. Rappelons que l'entier h est la dimension relative de A.

Théorème 3.1.3. *[BGK10, théorème 3.23] Soit A une variété abélienne de type III et $\ell \notin S$, alors il existe un $\mathcal{O}_\lambda$-module libre $\mathrm{T}_\lambda(A)$ de rang $2h$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{T}_\lambda(A) \cong \mathrm{T}_\lambda(A) \oplus \mathrm{T}_\lambda(A)$ *comme $\mathcal{O}_\lambda[G_K]$-modules ;*

(ii) Il existe une forme symétrique non dégénérée $\psi_\lambda : \mathrm{T}_\lambda(A) \times \mathrm{T}_\lambda(A) \to \mathcal{O}_\lambda$ *;*

(iii) Soit $\mathrm{T}_\lambda^\circ(A) = \mathrm{T}_\lambda(A) \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} E_\lambda$*. La forme symétrique induite* $\psi_\lambda^\circ : \mathrm{T}_\lambda^\circ(A) \times \mathrm{T}_\lambda^\circ(A) \to E_\lambda$ *est aussi non dégénérée. De plus le G_K-module $\mathrm{T}_\lambda^\circ(A)$ est absolument irréductible ;*

(iv) Soit $\overline{\mathrm{T}_\lambda}(A) = \mathrm{T}_\lambda(A) \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} k_\lambda$*. La forme symétrique induite* $\overline{\psi}_\lambda : \overline{\mathrm{T}_\lambda}(A) \times \overline{\mathrm{T}_\lambda}(A) \to k_\lambda$ *est aussi non dégénérée. De plus le G_K-module $\overline{\mathrm{T}_\lambda}(A)$ est absolument irréductible.*

Les trois formes sont compatibles avec l'action du groupe de Galois G_K.

Voici une reformulation de [HiRa16, proposition 3.5].

Proposition 3.1.1. *Soit* $\mathrm{V}_\lambda = \mathrm{V}_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$*. On a les trois résultats suivants :*

1. *La représentation V_λ est irréductible ;*
2. *Si la variété abélienne est de type I (resp. type II ou III) on a la décomposition suivante* $\mathrm{V}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{V}_\lambda$ *(resp.* $\mathrm{V}_\ell = \prod_{\lambda|\ell}(\mathrm{V}_\lambda \oplus \mathrm{V}_\lambda)$*) ;*
3. *Pour $\ell \notin \mathcal{S}$ on a une décomposition analogue pour les $\mathcal{O}_{E_\ell}$-modules T_ℓ.*

Remarquons que pour le point 2, la décomposition en type II ou III, pour les nombres premiers ramifiés de l'algèbre de quaternions, n'a lieu qu'après tensorisation par une extension quadratique de E.

Regardons plus en détail quelle est la principale différence entre le type II et le type III. En effet, comme l'explique Milne [Mil99] page 11 et 12, lorsque la variété abélienne est de type II, la forme ψ_λ° sur la représentation irréductible V_λ est antisymétrique et par conséquen symplectique. Lorsque A est une variété abélienne de type III, la forme ψ_λ° est symétrique, ce qui justifie que l'on travaille avec un groupe orthogonale. Ceci s'explique par le fait que dans le cas de type III, l'involution de Rosati est telle que pour tout élément $\beta \in D$, $\beta^{\dagger} = \beta$.

3.2 Propriété μ

Notations : Le symbole $\asymp$ signifie qu'il s'agit d'une égalité à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près.

Définition 3.2.1. *([HiRa10, Définition 6.3]) Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Nous dirons que A vérifie la* propriété μ *si, pour tout premier ℓ et tout sous-groupe fini H de $\mathrm{A}[\ell^{\infty}]$, il existe un entier $m = m(H)$ tel que, à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près :*

$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^{\infty}}) \asymp K(\mu_{\ell^m}).$$

Remarque. On a la même définition lorsque $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ ou bien $H_{\lambda} \subset A[\lambda]$.

On traitera dans un premier temps le cas où $H \subset \mathrm{A}[\ell^{\infty}]$. Ensuite on énoncera des résultats analogues pour les cas où $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ ou bien $H_{\lambda} \subset A[\lambda]$. Rappelons qu'il existe un entier n non nul tel que $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$.

Soit A une variété abélienne, vérifiant la conjecture de Mumford-Tate. On a les diagrammes suivants où les égalités sont à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près, plus exactement on a :

$$Gal(K(A[\ell^{\infty}])/K) \asymp \mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_{\ell}),$$

$$Gal(K(A[\ell^{\infty}])/K(\mu_{\ell^{\infty}})) \asymp \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_{\ell}),$$

$$Gal(K(\mu_{\ell^{\infty}})/K) \asymp \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_{\ell}),$$

$$\begin{tikzcd}
K(A[\ell^{\infty}]) \arrow[dd, dash, "\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_{\ell})"'] \arrow[dr, dash, "\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_{\ell})"] & & K(A[\ell]) \arrow[dd, dash, "\mathrm{MT(A)}(\mathbb{F}_{\ell})"'] \arrow[dr, dash, "\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_{\ell})"] & & K(A[\lambda]) \arrow[dd, dash, "\mathrm{MT(A)}(\mathbb{F}_{\lambda})"'] \arrow[dr, dash, "\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_{\lambda})"] & \\
& K(\mu_{\ell^{\infty}}) \arrow[dl, dash, "\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_{\ell})=\mathbb{Z}_{\ell}^{\times}"] & & K(\mu_{\ell}) \arrow[dl, dash, "\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_{\ell})=\mathbb{F}_{\ell}^{\times}"] & & K(\mu_{\ell}) \arrow[dl, dash, "\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_{\lambda})=\mathbb{F}_{\lambda}^{\times}"] \\
K & & K & & K &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Remarquons que les groupes $\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_{\ell})$, $\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_{\ell})$ et $\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_{\ell})$ des diagrammes précédents sont des groupes commensurables uniformément aux groupes de Galois $Gal(K(A[\ell^{\infty}])/K)$, $Gal(K(A[\ell^{\infty}])/K(\mu_{\ell^{\infty}}))$ et $Gal(K(\mu_{\ell^{\infty}})/K)$.

Cas $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

$$\begin{tikzcd}
& K(\mathrm{A}[\ell^\infty]) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)"] \arrow[ddd, dashed, dash, bend right=80, "\mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)"'] & \\
K(H) \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash] & & K(\mu_{\ell^\infty}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash, "\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell^\times"] \\
& K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \arrow[d, dash] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Cas $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

Étant donné que l'on suppose que la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A on sait que l'on a à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près :

$$Gal(K(A[\ell^\infty])/K) \asymp \mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell),$$

$$Gal(K(A[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \asymp \mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell),$$

ceci peut être illustré grâce au diagramme 3.1.

On introduit à présent deux groupes :

$$G_0(H) := \{\sigma \in \mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell), \sigma_{|H} = id_{|H}\} \asymp Gal(K(A[\ell^\infty])/K(H)),$$

$$G(H) := \{\sigma \in \mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell), \sigma_{|H} = id_{|H}\} \asymp G_0(H) \cap \mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell).$$

Remarque. On notera $\delta(H) := [K(\mu_{\ell^m}) : K]$. Ce degré mesure à quel point l'extension $K(H)$ contient l'image de l'accouplement de Weil.

Lemme 3.2.1. *Soit* $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$*, on a, à indice fini près*

$$\delta(H) = (\mathbb{Z}_\ell^\times : \mathrm{mult}(G_0(H))(\mathbb{Z}_\ell))$$

de plus

$$[K(H) : K] = (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H))\delta(H).$$

Preuve. On veut établir l'égalité suivante :

$$(\mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G_0(H)) = \delta(H) \cdot (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)).$$

On remarque dans un premier temps que

$$\begin{aligned}(\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G_0(H)) &= \frac{|Gal(K(A[\ell^\infty])/K)|}{|Gal(K(A[\ell^\infty])/K(H))|} \\ &= [K(H) : K] \\ &= [K(H) : K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty})][K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K].\end{aligned}$$

Notons $\delta(H) := [K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) : K]$, ainsi,

$$(\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G_0(H)) = [K(H) : K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty})] \cdot \delta(H).$$

En effet on remarque que

$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = [K(H) : K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty})].$$

Ainsi,

$$(\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G_0(H)) = (\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H).$$

On sait que $\mathrm{MT(A)} = \mathrm{Hg(A)} \cdot \mathbb{G}_m$, ainsi $\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) \cdot \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_\ell)$ et donc

$$\delta(H) = (\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_\ell) : \mathrm{mult}(G_0(H))(\mathbb{Z}_\ell)),$$

où $\mathrm{mult} : \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_m$ désigne l'homomorphisme canonique.

□

Cas $H \subset \mathrm{A}[\ell]$

Étant donné que l'on suppose que la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A on sait que l'on a à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près :

$$Gal(K(A[\ell])/K) \asymp \mathrm{MT(A)}(\mathbb{F}_\ell),$$

$$Gal(K(A[\ell])/K(\mu_\ell)) \asymp \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\ell),$$

ceci peut être illustré grâce au diagramme 3.2.

On introduit à présent les groupes :

$$G_0(H) := \{\sigma \in \mathrm{MT(A)}(\mathbb{F}_\ell), \sigma_{|H} = id_{|H}\} \asymp Gal(K(A[\ell])/K(H)),$$

$$G(H) := \{\sigma \in \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\ell), \sigma_{|H} = id_{|H}\} \asymp G_0(H) \cap \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\ell).$$

Lemme 3.2.2. *Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell]$, on a, à indice fini près*

$$\delta(H) = (\mathbb{F}_\ell^\times : \mathrm{mult}(G_0(H))(\mathbb{F}_\ell)).$$

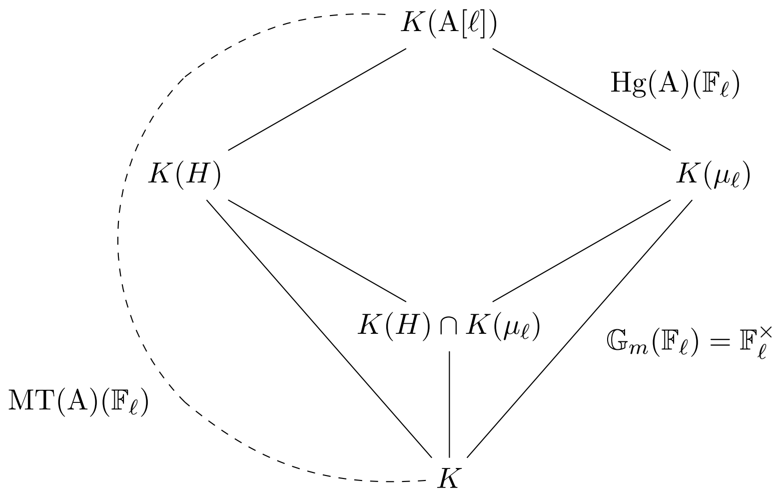

FIGURE 3.2 – Cas $H \subset \mathrm{A}[\ell]$

De plus

$$[K(H) : K] = (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\ell) : G(H))\delta(H).$$

Cas $H_\lambda \subset A[\lambda]$

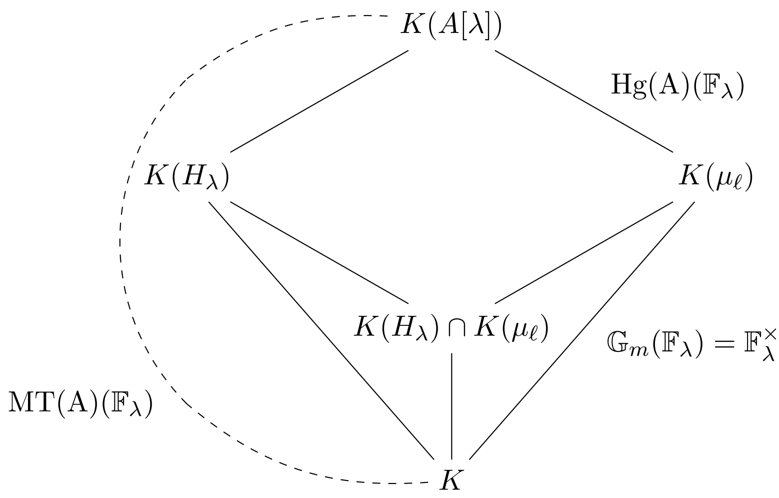

FIGURE 3.3 – Cas $H_\lambda \subset A[\lambda]$

Étant donné que l'on suppose que la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A on sait que l'on a à indice fini borné (indépendamment de ℓ) près :

$$Gal(K(A[\lambda])/K) \asymp \mathrm{MT}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\lambda),$$

$$Gal(K(A[\lambda])/K(\mu_\ell)) \asymp \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\lambda),$$

ceci peut être illustré grâce au diagramme 3.3.

On introduit à présent les groupes :

$$G_0(H_\lambda) := \{\sigma \in \mathrm{MT(A)}(\mathbb{F}_\lambda), \sigma_{|H_\lambda} = id_{|H_\lambda}\} \asymp Gal(K(A[\lambda])/K(H_\lambda)),$$

$$G(H_\lambda) := \{\sigma \in \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\lambda), \sigma_{|H_\lambda} = id_{|H_\lambda}\} \asymp G_0(H_\lambda) \cap \mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\lambda).$$

Lemme 3.2.3. *Soit $H_\lambda \subset A[\lambda]$. On a, à indice fini près*

$$\delta(H_\lambda) = (\mathbb{F}_\lambda^\times : \mathrm{mult}(G_0(H_\lambda))(\mathbb{F}_\lambda)).$$

De plus

$$[K(H_\lambda) : K] = (\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{F}_\lambda) : G(H_\lambda))\delta(H_\lambda).$$

3.2.1 L'image du multiplicateur

On définit le multiplicateur mult comme étant le morphisme suivant

$$\mathrm{mult} : \mathrm{GSp_{2g}} \to \mathbb{G}_m.$$

En effet, étant donné que $\mathrm{MT(A)} \hookrightarrow \mathrm{GSp_{2g}}$ et que ce plongement ne dépend que de la polarisation on peut sans aucun problème le restreindre à $\mathrm{mult} : \mathrm{MT(A)} \to \mathbb{G}_m$. Ainsi, le groupe de Hodge peut être vu comme $(ker(\mathrm{mult}))^\circ$.

On se place dans le cas où A est une variété abélienne simple de type III, de dimension g et pleinement de type Lefschetz, ainsi $\mathrm{MT(A)} = \mathcal{L}(A)$ (voir section 3.1). On a alors

$$\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) = \{(m_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GO}_{\mathcal{O}_\lambda}, \mathrm{mult(m_\lambda) = m} \in \mathbb{Z}_\ell^\times\}. \tag{3.3}$$

Proposition 3.2.1. *Soit $\hat{H}$ un sous-$\mathbb{Z}_\ell$ module de $\mathrm{T}_\ell(A)$, si $\hat{H}$ est un module isotrope maximal de dimension au plus g alors le morphisme* $\mathrm{mult} : G_{\hat{H}} \to \mathbb{G}_m$ *est surjectif, où $G_{\hat{H}}$ est le stabilisateur de $\hat{H}$ dans* $\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell)$.

Remarque. — Cette proposition se traduit par le fait que pour tout sous-module qui est inclus dans un module isotrope maximal on a $\mathrm{mult}(G_{\hat{H}}) = \mathbb{G}_m$ et $\mathrm{mult}(G_{\hat{H}})(\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell^\times$. Par conséquent

$$\delta(\hat{H}) = (\mathbb{Z}_\ell^\times : \mathrm{mult}(G_{\hat{H}})(\mathbb{Z}_\ell)) = 1.$$

— Notons $\delta(\hat{H}) := (\mathbb{Z}_\ell^\times : \mathrm{mult}(G_{\hat{H}})(\mathbb{Z}_\ell))$ (par abus de langage on notera parfois $\delta(H)$

où $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ ou bien $\delta(W)$ avec $W \subset \mathrm{V}_\ell$). Alors on remarque que

$$\delta(H) = \begin{cases} 1 = \ell^0 \text{ si } H \text{ est inclus dans un espace isotrope maximal,} \\ \ell = \ell^1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On introduit à présent $\delta := \log_\ell \delta(H)$ (ou bien $\delta(H) = \ell^\delta$), ainsi

$$\delta = \begin{cases} 0 \text{ si } H \text{ est inclus dans un espace isotrope maximal,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans le but de montrer la proposition 3.2.1 on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.4. *Soit W un sous espace totalement isotrope de dimension h, alors il existe un sous espace totalement isotrope W' tel que* $\dim W' = h$ *et* $W \oplus W' = P_1 \oplus ... \oplus P_h$*, où les P_i sont des plans hyperboliques.*

Preuve. Soit $W =< e_1, ..., e_h >$ une $\mathbb{Q}_\ell$-base de W, alors il existe un vecteur $f_1' \in \mathrm{V}_\ell$ tel que $Q_\ell^\circ(f_1') = 0$ et $\psi_\ell^\circ(e_1, f_1') = 1$ (voir lemme 1 dans [Yos70]) de telle sorte que $< e_1, f_1' >$ soit un plan hyperbolique. On considère le vecteur : $f_1 = f_1' + \sum_{i=2}^h \lambda_i e_i$ tel que pour tout $i \in [\![2, h]\!]$ on ait $\psi_\ell^\circ(e_i, f_1') = 0$. Ainsi, on obtient

$$< e_1, ..., e_h, f_1 >=< e_1, f_1 >\perp< e_2, ..., e_h > .$$

De façon équivalente il existe des vecteurs $f_2, ..., f_h$ isotropes tels que

$$< e_1, ..., e_h, f_1, ..., f_h >=< e_1, f_1 >\perp ... \perp< e_h, f_h > .$$

Posons $W' =< f_1, ..., f_h >$, ainsi W' est bien un sous-espace totalement isotrope de dimension h et pour tout $i \in [\![1, h]\!]$ on a les plans hyperboliques $P_i =< e_i, f_i >$. En particulier on a bien $W \oplus W' = P_1 \oplus ... \oplus P_h$.

□

Remarque. Grâce au théorème 1.3.2 on sait que lorsque $\dim \mathrm{V}_\ell \geq 5$ des vecteurs isotropes existent.

Preuve. *(proposition 3.2.1)*
Soit W le sous-espace isotrope maximal associé à $\hat{H}$ dans V_ℓ tel que $W = \hat{H} \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Comme précédemment on note h la dimension de H et on lui associe la base $< e_1, ..., e_h >$. On considère le stabilisateur G_W de W dans $GL_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$. On rappel que $G_W = \{M \in \mathrm{GO_g} | Me_i = e_i \, \forall i \in [\![1, h]\!]\}$. En particulier, $G_W \subset \mathrm{MT(A)}(\mathbb{Q}_\ell)$ ainsi, on peut restreindre sans aucun problème le multiplicateur à G_W et montrer que, lorsque W est un espace isotrope maximal, $\mathrm{mult} : G_W \to \mathbb{G}_m$ est surjectif (ce qui est équivalent à montrer que $\delta(\hat{H}) = 1$).

Pour cela considérons d'abord le cas où $W =< e_1 >$ (et on généralisera par la suite) avec e_1 un vecteur isotrope. On sait qu'il existe un vecteur $e_2 \in \mathrm{V}_\ell$ isotrope tel que $\psi_\ell^\circ(e_1, e_2) = 1$, ainsi on obtient le plan hyperbolique : $\Pi =< e_1, e_2 >$. On a alors $\Pi \cap \Pi^\perp = \{0\}$ et $\Pi \oplus \Pi^\perp = \mathrm{V}_\ell$. Soit $M \in \mathrm{GO_g} \subset \mathrm{GSp_{2g}}$ alors $\psi_\ell^\circ(Me_1, Me_2) = \mathrm{mult}(M)\psi_\ell^\circ(e_1, e_2)$. On considère à présente le stabilisateur de W, $G_W = \{M \in \mathrm{GO_g}, Me_1 = e_1\}$. Ainsi, si $M \in G_W$ on a

$$\begin{cases} Me_1 = e_1, \\ Me_2 = \mathrm{mult}(M)e_2. \end{cases}$$

On remarque que pour toute $M \in G_W$ le plan hyperbolique Π reste stable par M et par conséquent $\Pi^\perp$ est aussi stable par M. On considère à présent une matrice $M_1 \in \mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp})$. On a alors :

$$M = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & \mathrm{mult}(M) & \\ \hline & & \\ & & M_1 \\ & & \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{1\quad\mathrm{mult}(M)\quad}}_{\Pi}\ \underbrace{\hphantom{M_1\quad}}_{\Pi^\perp}\end{array}$$

On introduit le groupe :

$$G_2 = \{M \in \mathrm{GO_g}, M =< 1, \mathrm{mult}(M_1) > \oplus M_1 \quad \text{où } M_1 \in \mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp})\} \subset \mathrm{G}_1.$$

On remarque que la restriction de mult à $\mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp})$ est surjective et on a la composition suivante :

$$\mathrm{mult}_{|\mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp})} : \mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp}) \overset{\mathrm{i}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{G}_2 \overset{\mathrm{mult}_{|\mathrm{G}_2}}{\to} \mathbb{G}_\mathrm{m}.$$

Ainsi mult : $G_W \to \mathbb{G}_m$ est surjectif.

On peut à présent généraliser au cas où $W =< e_1, ..., e_h >$ avec $h \leq g$. Ainsi, d'après le lemme 3.2.4 on sait qu'il existe h plans hyperboliques Π_1, ..., Π_h tels que

$$\mathrm{V}_\ell = (\Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_h) \oplus (\Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_h)^\perp.$$

Notons à présent $\Pi = \Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_h$ et $\Pi^\perp = (\Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_h)^\perp$. Soit $M_1 \in \mathrm{GO}(\mathrm{Q}^\circ_{\ell|\Pi^\perp})$. Comme précédemment, toute matrice M dans $G_W = \{M \in \mathrm{GO_g} | Me_i = e_i \, \forall i \in [\![1, h]\!]\}$

s'écrit de la façon suivante :

$$M = \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & & & & & & \\
& \mathrm{mult}(M) & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \mathrm{mult}(M) & \\
\hline
& & & & & & \\
& & & & & & M_1 \\
& & & & & &
\end{array}\right)$$

Lorsque W n'est pas totalement isotrope, on sait qu'il existe $e_1, e_2 \in \mathrm{V}_\ell$ tels que $\psi_\ell^\circ(e_1, e_2) \neq 0$. Par conséquent, pour tout matrice $M \in G_W$ on a

$$\begin{cases} \psi_\ell^\circ(Me_1, Me_2) = \psi_\ell^\circ(e_1, e_2), \\ \psi_\ell^\circ(Me_1, Me_2) = \mathrm{mult}(M)\psi_\ell^\circ(e_1, e_2). \end{cases}$$

On déduit, grâce aux deux égalités précédentes que $\mathrm{mult}(M) = 1$.

$\square$

Chapitre 4

Invariant $\gamma(A)$ pour tout produit de variétés abéliennes de type I, II ou III

L'objectif de ce chapitre est de prouver la conjecture 0.0.1 sous l'hypothèse que la variété abélienne est pleinement de type Lefschetz. Donnons tout d'abord une philosophie générale de cette conjecture. On rappelle que $\mathrm{G}_\ell = \overline{\rho_\ell(G_K)}^{\mathrm{Zar}} \subset \mathrm{MT(A)} \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Ainsi, l'étape initiale serait de regarder le groupe de ℓ-torsion et d'étudier le degré de l'extension qu'il engendre. On obtient alors, à indice finis près, borné uniformément :

$$[K(A[\ell]) : K] \asymp \#\mathrm{G}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \asymp \ell^{\dim \mathrm{G}_\ell} = \#A[\ell]^{\frac{\dim \mathrm{G}_\ell}{2 \dim A}}.$$

Donc $\gamma(A) \geq \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{G}_\ell} \geq \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}}$.

Dans le cas où A est isogène à $\prod_{i=1}^{d} A_i^{n_i}$ on obtient

$$\gamma(A) \geq \max \frac{2 \sum_{i \in I} n_i \dim A_i}{\dim \mathrm{MT(A)}(A_I)} =: \gamma_0(A),$$

où $I \subset \{1, ..., d\}$ est un ensemble non vide et $A_I = \prod_{i=1}^{d} A_i$.

On peut sans aucun problème passer aux points de ℓ^n-torsion pour tout entier non nul n. L'objectif est donc de prouver que lorsque A est pleinement de type Lefschetz, $\gamma(A) = \gamma_0(A)$. On remarque que si A ne vérifie pas la conjecture de Mumford–Tate on obtient une inégalité stricte : $\gamma(A) > \gamma_0(A)$.

Remarquons également que nos résultats s'étendent aux extensions finis de $\mathbb{Q}$ (voir [BGP] et [CaTa12]) mais nous n'avons pas rédigé cette extension.

Détaillons à présent les différentes étapes à suivre afin de déterminer l'invariant $\gamma(A)$. Tout d'abord, grâce au critère d'indépendance des représentation ℓ-adiques de Serre, on peut se restreindre à l'étude des sous-groupes finis de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. On se ramène alors à l'étude de l'invariant $\gamma_\ell(A)$ (que l'on notera $\gamma(A)$ afin se simplifier les notations) défini comme suit :

$$\gamma(A) = \inf\{x > 0 \,|\, \forall H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty],\, |H| \ll [K(H):K]^x\}. \tag{4.1}$$

De cette définition on peut tirer l'équivalence suivante pour tout sous-groupe H de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$:

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H):K]}.$$

On remarque alors que les deux valeurs qui interviennent dans la détermination de $\gamma(A)$ sont le cardinal du sous-groupe H et le degré de l'extension $K(H)$ sur K. Ainsi, la preuve se divise naturellement en deux étapes : dans un premier temps, on détermine ces deux quantités, et ensuite, grâce à des méthodes combinatoires, on obtient l'invariant $\gamma(A)$.

Le cardinal du sous-groupe fini H se détermine sans difficulté particulière. Cependant le degré de l'extension $K(H)$ sur K est plus difficile à déterminer. Dans le chapitre 3, on développe toute la théorie des représentations ℓ-adiques galoisiennes qui nous permet de décomposer ce degré de la façon suivante :

$$[K(H):K] = (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H).$$

L'objectif de ce chapitre sera d'expliciter chaque terme. Grâce à la propriété dite "propriété μ" (voir section 3.2), on détermine la valeur de $\delta(H)$. En utilisant les lemmes de comptages, développés dans le chapitre 2, on estime l'indice du stabilisateur $G(H)$ dans $\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell)$. La deuxième étape de la preuve utilise des méthodes combinatoires pour déterminer l'invariant $\gamma(A)$ que l'on détaillera à chaque étape.

Notations : Dans le but de simplifier les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variété abélienne A, on notera pour tout $\ell \notin \mathcal{S}$

- T_ℓ ;
- $\mathrm{V}_\ell = \mathrm{T}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$;
- $\mathrm{T}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda$ et $\mathrm{V}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{V}_\lambda$;
- Lorsque A est de type I on a $\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda$ et $\mathcal{V}_\lambda = \mathrm{V}_\lambda$;
- Lorsque A est de type II ou III on a $\mathcal{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda$ et $\mathcal{V}_\lambda = \mathrm{V}_\lambda \oplus \mathrm{V}_\lambda$.

Donnons à présent les notations modulo ℓ

- $\mathrm{A}[\ell] = \mathrm{T}_\ell/\ell\mathrm{T}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda/\ell\mathcal{T}_\lambda$, remarquons que $\ell\mathcal{O}_\lambda = \lambda^{e(\lambda)}$;
- Notons $\mathrm{T}_\lambda[\ell] = \mathrm{T}_\lambda/\ell\mathrm{T}_\lambda$, ainsi si A est de type I on a $\mathrm{A}[\ell] = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda[\ell]$, et si A est de type II ou III on a $\mathrm{A}[\ell] = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda[\ell] \oplus \mathrm{T}_\lambda[\ell]$.

Maintenant on se concentre sur le cas d'un sous-groupe H de $\mathrm{A}[\ell]$ lorsque la variété abélienne est de type II ou III.

— $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$, où $H_\lambda \subset \mathrm{T}_\lambda[\ell]$;

Hypothèses : Tout au long des deux sections suivantes, on supposera que la variété abélienne A est définie sur un corps de nombres K telle que l'anneau des endomorphismes définis sur K est égal à l'anneau d'endomorphismes définis sur $\bar{K}$, on le notera $\mathrm{End}(A)$. On suppose également qu'il est un ordre maximal dans $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. De même, on suppose que le sous-groupe H est stable par $\mathrm{End}(A)$. Le corps de nombres K est tel que le groupe G_ℓ est connexe et les représentations ℓ-adiques sont indépendantes. En effet on remarque que, quitte à remplacer A par une variété abélienne isogène A' et K par une extension finie K', ces hypothèses sont satisfaites.

4.1 Variétés abéliennes simples de type III

On considère une variété abélienne A définie sur un corps de nombres K simple de type III et de dimension $g = deh$ (dans notre cas $d = 2$). On note G_K le groupe absolu de Galois. Soit ℓ un nombre premier tel que $\ell \notin \mathcal{S}$ (voir définition 3.1.3).

Le but de cette section sera de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soit A une variété abélienne simple de type III, dont le centre de l'algèbre d'endomorphismes est un corps de nombres totalement réel E de degré $e = [E : \mathbb{Q}]$, avec $d = \sqrt{[\mathrm{End}^\circ(A) : E]} = 2$ et h la dimension relative de A. On suppose que A est pleinement de type Lefschetz, alors on a*

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1 + e(2h^2 - h)} = \frac{2 \dim A}{\dim \mathrm{Hg(A)} + 1}.$$

Remarque. Étant donné que $E \otimes \mathbb{Q}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} E_\lambda$ on a $e = [E : \mathbb{Q}] = \sum_{\lambda|\ell} [E_\lambda : \mathbb{Q}_\ell]$. Supposer que A est de type Lefschetz est équivalent à

$$\mathrm{Hg(A)}_{\mathbb{Q}_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{SO_{2h}}(\mathcal{O}_\lambda) = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{Res}_{\mathrm{E}_\lambda/\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{SO}_{\mathrm{2h,E}_\lambda}.$$

On peut déduire de l'égalité précédente la dimension du groupe de Hodge de A :

$$\dim \mathrm{Hg(A)}_{\mathbb{Q}_\ell} = \sum_{\lambda|\ell} [E_\lambda : \mathbb{Q}_\ell] \frac{2h(2h-1)}{2} = e(2h^2 - h).$$

Preuve. La preuve sera divisée en deux parties. Chaque partie est divisée en l'étude, dans un premier temps, du cardinal du sous-groupe H et ensuite de la détermination de $[K(H) : K]$. À la fin de chaque partie une étude combinatoire est faite dans le but de déterminer l'invariant $\gamma(A)$.

1 - Cas où $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda \subset \mathrm{A}[\ell]$ On suppose que le nombre premier ℓ n'est pas totalement décomposé, par conséquent $e = \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) \neq 1$ où $f(\lambda)$ est le degré résiduel de λ au dessus de ℓ (et $\forall \lambda|\ell$ on a $e(\lambda) = 1$). On rappelle les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_\ell(A) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2g} \arrow[d, dash] \\ \mathcal{O}_{E_\ell} \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Z}_\ell \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{T}_\lambda(A) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2h} \arrow[d, dash] \\ \mathcal{O}_\lambda \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Z}_\ell \end{tikzcd} \qquad \mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda(A) \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} \mathcal{O}_{E_\ell} \tag{4.2}$$

Étant donné que A est de type III, on a $\mathcal{T}_\lambda(A) = \mathrm{T}_\lambda(A) \oplus \mathrm{T}_\lambda(A)$. Par passage au quotient, on a $\mathrm{A}[\ell] = \mathrm{T}_\ell(A)/\ell\mathrm{T}_\ell(A)$.

$$\mathrm{A}[\ell] = \prod_{\lambda|\ell} (\mathcal{T}_\lambda(A)/\ell\mathcal{T}_\lambda(A)) \otimes_{\mathcal{O}_\lambda/\ell\mathcal{O}_\lambda} (\mathcal{O}_{E_\ell}/\ell\mathcal{O}_{E_\ell}) \tag{4.3}$$

Où $\mathcal{T}_\lambda(A)/\ell\mathcal{T}_\lambda(A) = \mathrm{T}_\lambda[\ell] \oplus \mathrm{T}_\lambda[\ell]$.

Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ alors $H = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{H}_\lambda = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$. Notre but est de déterminer l'invariant $\gamma(A)$ donné par l'inégalité suivante, à constante multiplicative près,

$$|H| \ll [K(H) : K]^{\gamma(A)} \qquad \iff \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H) : K]}. \tag{4.4}$$

Cependant on va se concentrer plus particulièrement sur les sous-groupes H_λ, étant donné que la variété abélienne est de type III, on sait que $\mathcal{H}_\lambda = H_\lambda \oplus H_\lambda$ se décompose en la somme de deux copies. Par conséquent, pour obtenir notre invariant global on devra à la fin multiplier notre résultat par $d = 2$

Cardinal de H Déterminons le cardinal de H lorsque $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda \subset \mathrm{A}[\ell]$, on note $r_\lambda = rg_{\mathbb{F}_\lambda} H_\lambda$ tel que $0 \leq r_\lambda \leq 2h$. Ainsi on déduit que

$$rg_{\mathbb{F}_\ell} H = 2 \cdot \sum_{\lambda|\ell} rg_{\mathbb{F}_\lambda} H_\lambda = 2 \cdot \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda.$$

Ainsi

$$|H| = \ell^{2 \cdot \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda} = \ell^{d \cdot \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda}.$$

Détermination de $[K(H) : K]$ En effet, grâce à la propriété μ (définition 3.2.1), on sait qu'il existe un entier m, associé au sous-groupe H tel que

$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m}).$$

Ainsi, pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ on a le diagramme 4.1 où $K(H) \cap K(\mu_\ell)$ est égale à K ou à $K(\mu_\ell)$.

$$\begin{tikzcd}
& K(\mathrm{A}[\ell]) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(H) \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash] & & K(\mu_\ell) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash] \\
& K(H) \cap K(\mu_\ell) \arrow[d, dash] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.1 – “Propriété μ”

La proposition suivante est une reformulation de la [HiRa16, Proposition 7.3] adaptée à notre cas

Proposition 4.1.1. *Soit A une variété abélienne simple de type III définie sur un corps de nombres K. Alors*

$$\mathrm{T}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda.$$

On pose $A[\lambda] = \mathrm{T}_\lambda / \ell \mathrm{T}_\lambda$, alors

1. *Pour tout $\lambda|\ell$ et tout $H_\lambda \subset A[\lambda]$, il existe un entier m_λ tel que*

$$K(H_\lambda) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^{m_\lambda}});$$

2. *on a l'identité*

$$Gal(K(\mathrm{A}[\ell])/K(\mu_{\ell^\infty})) \simeq \prod_{\lambda|\ell} Gal(K(A[\lambda])/K(\mu_{\ell^\infty})).$$

Alors si $m := \max_\lambda m_\lambda$, pour tout sous-groupe fini $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda \subset \mathrm{A}[\ell]$, on a $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m})$ et

$$[K(H) : K(\mu_{\ell^m})] \gg\ll \prod_{\lambda|\ell} [K(H_\lambda) : K(\mu_{\ell^{m_\lambda}})].$$

Cette dernière proposition peut être illustrée grâce au diagramme 4.2 :

Grâce au diagramme 4.2 et aux lemmes 3.2.2 et 3.2.3 on a, à indice fini près, les équations suivantes (voir section 3.2) :

$$\begin{aligned} [K(H) : K] &= [K(H) : K(\mu_{\ell^m})][K(\mu_{\ell^m}) : K] \\ &= (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H). \end{aligned} \tag{4.5}$$

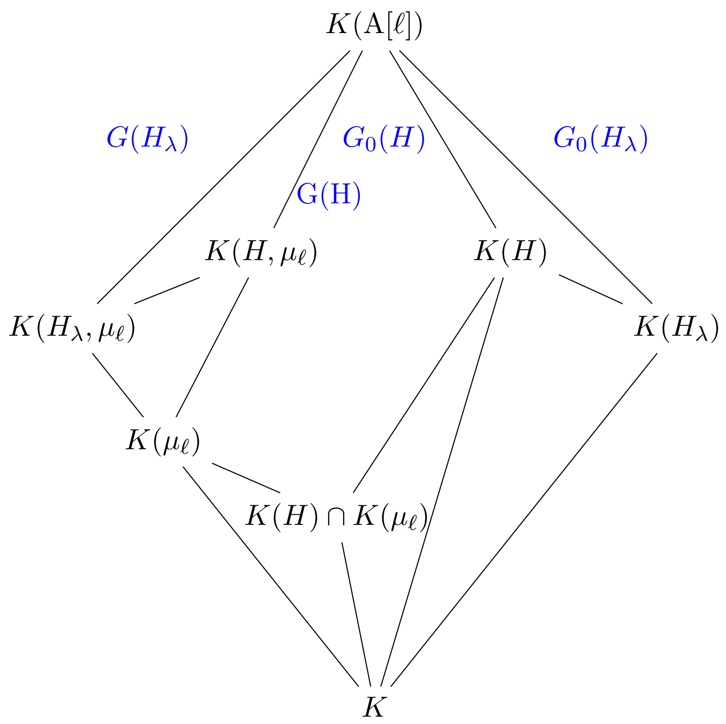

FIGURE 4.2 – Proposition 4.1.1

De plus, grâce à la proposition 4.1.1 et au fait que $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$, on obtient l'égalité suivante à indice fini près :

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\ell) : G(H)) = \prod_{\lambda|\ell} (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\lambda) : G(H_\lambda)). \tag{4.6}$$

Le but à présent sera donc de déterminer pour tout $\lambda|\ell$ la valeur de

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\lambda) : G(H_\lambda)). \tag{4.7}$$

On sait que, pour tout nombre premier ℓ, on peut estimer la valeur de l'équation (4.7). Ainsi, on déduit grâce au lemme 2.1.10 la valeur précédente, à des constantes multiplicatives près,

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\lambda) : G(H_\lambda)) \gg\ll (\sharp\mathbb{F}_\lambda)^{\mathrm{codim}\ G(H_\lambda)},$$

et par conséquent

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{F}_\ell) : G(H)) \gg\ll \prod_{\lambda|\ell} (\sharp\mathbb{F}_\lambda)^{\mathrm{codim}\ G(H_\lambda)}.$$

Ainsi, d'après l'équation (4.5) on a

$$[K(H):K] \gg\ll \ell^{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)\,\mathrm{codim}\ G(H_\lambda)} \cdot \delta(H),$$

où d'après le théorème 2.1.5 on a codim $G(H_\lambda) = \frac{(4h-1)r_\lambda - r_\lambda^2}{2}$.

De plus, $\delta(H) = \ell^\delta$, ainsi

$$[K(H):K] \gg\ll \ell^{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)\,\mathrm{codim}\ G(H_\lambda)+\delta}. \tag{4.8}$$

On réalise à présent une étude combinatoire afin de déterminer notre invariant $\gamma(A)$. En effet, pour tout $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ on a

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \quad \iff \quad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H):K]}.$$

Ainsi, étant donné que l'on prend en compte les deux copies de H_λ on a, pour $d = 2$

$$\frac{1}{d}\gamma(A) := \max_{r_\lambda} \psi(\underline{r}),$$

où $\underline{r} = (r_\lambda)_{\lambda|\ell}$ et où la fonction ψ est définie comme suit :

$$\psi(\underline{r}) = \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda}{\delta + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)\,\mathrm{codim}\, G_{H_\lambda}}$$

L'idée est donc d'étudier le maximum de cette fonction lorsque r_λ varie, pour cela on va séparer l'étude en deux parties.

1. Dans un premier temps, on considère le cas où H_λ est contenu dans un espace isotrope maximal, ainsi $0 \leq r_\lambda \leq h$ (car un sous-espace isotrope maximal de $A[\lambda]$ (de dimension $2h$) est de dimension au plus h) pour tout $\lambda|\ell$ et $\delta(H_\lambda) = 1$. On a alors $\delta = 0$.
2. On suppose ensuite que H_λ n'est pas contenu dans un espace isotrope maximal ainsi $\delta(H_\lambda) = \ell$ et par conséquent $\delta = 1$. Ainsi, on obtiendra le maximum de la fonction ψ en comparant les maximum obtenues dans ces deux cas.

On étudiera la fonction suivante :

$$\psi(\underline{r}) = \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda}{\delta + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) \frac{(4h-1)r_\lambda - r_\lambda^2}{2}}$$

Premier cas $\delta = 0$ On considère la fonction

$$\psi(\underline{r}) = \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda}{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)(-r_\lambda^2 + r_\lambda(4h-1))}$$

Après une étude de fonction, on constate que ψ est croissante et atteint son maximum lorsque $r_\lambda = h$. Ainsi,

$$\max_{r_\lambda \in [0,h]} \psi(\underline{r}) = \frac{2}{3h-1}.$$

Deuxième cas $\delta = 1$ On considère la fonction

$$\psi(\underline{r}) = \frac{2\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_\lambda}{2 + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)(r_\lambda(4h-1) - r_\lambda^2)}$$

Après une étude de fonction, on constate que ψ est croissante et atteint son maximum lorsque $r_\lambda = 2h$. Ainsi,

$$\max_{r_\lambda \in [0,2h]} \psi(\underline{r}) = \frac{2eh}{1 + e(2h^2 - h)}.$$

Conclusion Finalement, on détermine le maximum de la fonction ψ :

$$\max_{r_\lambda} \psi(\underline{r}) = \max\left(\frac{2}{3h-1}, \frac{2eh}{1+e(2h^2-h)}\right) = \frac{2eh}{1+e(2h^2-h)}$$

On revient au point de départ et on obtient que pour $d = 2$

$$\frac{1}{d}\gamma(A) = \max_{r_\lambda} \psi(\underline{r}) = \frac{2eh}{1+e(2h^2-h)},$$

donc

$$\gamma(A) = \frac{2deh}{1+e(2h^2-h)} = \frac{2\dim A}{1 + \dim \mathrm{Res}_{\mathrm{E}/\mathbb{Q}} \mathrm{SO}_{2\mathrm{h}}} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT(A)}}.$$

Remarque. On remarque que lorsque $H \subset \mathrm{A}[\ell]$ et que ℓ est totalement décomposé, il suffit de remplacer e par 1 et on obtient bien le résultat prévu.

2 - <u>Cas général où $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$</u> Dans le but de prouver notre théorème dans le cas général, on doit introduire quelques notations concernant le sous-groupe H. On rappelle que A est une variété abélienne simple définie sur un corps de nombres K de dimension $\dim A = g = deh$ où d=2 dans notre cas car A est de type III.

Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$, alors il existe un entier non nul n tel que $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$. Dans le but de déterminer l'invariant $\gamma(A)$, on devra, dans un premier temps, déterminer le cardinal du sous-groupe H et ensuite la valeur de $[K(H) : K]$.

Étant donné que A est de type III, on a la décomposition suivante :

$$H = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{H}_\lambda, \qquad \text{où } \forall\, \lambda|\ell \text{ on a } \qquad \mathcal{H}_\lambda = H_\lambda \oplus H_\lambda$$

On remarque que $\mathrm{T}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda$ et $H_\lambda \subset \mathrm{T}_\lambda/\ell^n\mathrm{T}_\lambda = \mathrm{T}_\lambda[\ell^n]$. Ainsi, grâce à l'existence d'une base de T_λ, pour tout $\lambda|\ell$, on a :

$$H_\lambda = \prod_{i=1}^{t_\lambda} (\mathbb{Z}/\ell^{m_\lambda^i}\mathbb{Z})^{\alpha_{\lambda,i} f(\lambda)} \simeq \prod_{i=1}^{t_\lambda} (\mathcal{O}_\lambda/\ell^{m_\lambda^j}\mathcal{O}_\lambda)^{\alpha_{\lambda,i}},$$

où $1 \leq t_\lambda \leq 2h$, $f(\lambda)$ est le degré résiduel de λ par rapport à ℓ et $1 \leq m_\lambda^{t_\lambda} < ... < m_\lambda^1$ est une suite d'entiers strictement décroissante.

Cardinal de H En effet

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\lambda} H_\lambda = \sum_{i=1}^{t_\lambda} \alpha_{\lambda,i} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_\lambda = f(\lambda) \cdot \sum_{i=1}^{t_\lambda} \alpha_{\lambda,i},$$

ainsi,

$$|H_\lambda| = \ell^{f(\lambda)\sum_{i=1}^{t_\lambda} \alpha_{\lambda,i} m_\lambda^i}.$$

Étant donné que $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$, on a

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H = d \cdot \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_\lambda \quad \text{et par conséquent} \quad |H| = \ell^{\sum_{\lambda|\ell} d f(\lambda) \sum_{i=1}^{t_\lambda} \alpha_{\lambda,i} m_\lambda^i}.$$

Notons $a_{\lambda,i} = d\alpha_{\lambda,i}$, alors

$$\log_\ell |H| = \sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) a_{\lambda,i} m_\lambda^i. \tag{4.9}$$

Calcul de $[K(H) : K]$ En effet, grâce à la propriété μ (définition 3.2.1), on sait qu'il existe un entier m, associé au sous-groupe H tel que

$$K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m}).$$

Ainsi, pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & K(\mathrm{A}[\ell^\infty]) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(H) \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash] & & K(\mu_{\ell^\infty}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash] \\
 & K(\mu_{\ell^m}) \arrow[d, dash] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.3 – “Propriété μ”

La proposition suivante, adaptée à notre cas, est une reformulation de la [HiRa16, Proposition 7.3].

Proposition 4.1.2. *Soit A une variété abélienne simple de type III définie sur un corps de nombres K. Alors*

$$\mathrm{T}_\ell = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda.$$

On pose $A[\lambda^\infty] = \cup_n A[\lambda^n]$ où $A[\lambda^n] = \mathrm{T}_\lambda/\ell^n \mathrm{T}_\lambda$, alors

1. *Pour tout $\lambda|\ell$ et tout $H_\lambda \subset A[\lambda^n]$, il existe un entier m_λ tel que*

$$K(H_\lambda) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^{m_\lambda}});$$

2. *on a l'identité*

$$Gal(K(\mathrm{A}[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \simeq \prod_{\lambda|\ell} Gal(K(A[\lambda^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})).$$

Alors si $m := \max_\lambda m_\lambda$, pour tout sous-groupe fini $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ on a $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m})$ et

$$[K(H) : K(\mu_{\ell^m})] \gg\ll \prod_{\lambda|\ell} [K(H_\lambda) : K(\mu_{\ell^{m_\lambda}})].$$

Cette dernière proposition peut être illustrée grâce au diagramme suivant :

Grâce au diagramme 4.4 et à la propriété μ (lemme 3.2.1), on obtient l'égalité suivante à indice fini près

$$\begin{aligned} [K(H) : K] &= [K(H) : K(\mu_{\ell^m})][K(\mu_{\ell^m}) : K] \\ &= (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H). \end{aligned} \tag{4.10}$$

De plus, grâce à la proposition 4.1.2 et au fait que $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$, on obtient l'égalité suivante à indice fini près :

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = \prod_{\lambda|\ell} (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathcal{O}_\lambda) : G(H_\lambda)). \tag{4.11}$$

Le but à présent sera donc de déterminer, pour tout $\lambda|\ell$, la valeur de

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathcal{O}_\lambda) : G(H_\lambda)). \tag{4.12}$$

Pour cela on utilisera le lemme 2.1.10 qui est une variante de la version λ-adique du [HiRa16, Lemme 2.3]. On va donc définir nos stabilisateurs $G(H_\lambda)$ comme dans le cas précédent.

On introduit à présent pour tout $\lambda|\ell$ et tout $i \in [\![1, t_\lambda]\!]$ les sous-modules W_i de T_λ tels

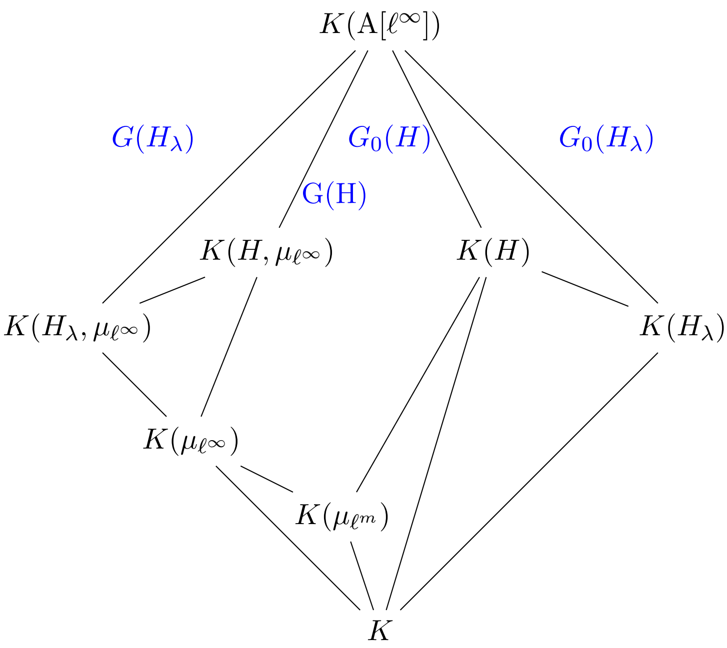

FIGURE 4.4 – Proposition 4.1.2

que :

$$W_i \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^{m^i_\lambda}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_{\lambda,i}},$$

et $\dim W_i = f(\lambda)\alpha_{\lambda,i}$.

Ceci nous permet de donner une décomposition de T_λ :

$$\mathrm{T}_\lambda = (\bigoplus_{i=1}^{t_\lambda} W_i) \oplus W'.$$

On introduit les sous-groupes V_i définis comme suit :

$$V_i := \prod_{k=1}^{t_\lambda-(i-1)} (\mathbb{Z}/\ell^{m^k_\lambda}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_{\lambda,k}} \simeq \prod_{k=1}^{t_\lambda-(i-1)} (\mathcal{O}_\lambda/\ell^{m^k_\lambda}\mathcal{O}_\lambda)^{\alpha_{\lambda,k}}$$

tels que $V_{t_\lambda} \subset ... \subset V_1$.

Notons $\hat{V}_i$ ses relevés dans T_λ. On définit alors

$$r_i := \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_\lambda} \hat{V}_i = \sum_{k=1}^{t_\lambda-(i-1)} \alpha_{\lambda,k}.$$

Soient $G_{\hat{V}_i}$ les stabilisateurs de $\hat{V}_i$. Voici le lien entre ces stabilisateurs et le stabilisateur

$G(H_\lambda)$
$$G(H_\lambda)=\{M\in G(\mathcal{O}_\lambda),\, M\in G_{\hat{V}_i} \mod \ell^{m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}}\ \forall i\in [\![1,t_\lambda]\!]\}.$$

Dans le but d'utiliser le lemme 2.1.10, on doit connaître la codimension des stabilisateurs $G_{\hat{V}_i}\subset \mathrm{GO}_{2\mathrm{h}}$, pour cela on utilise le théorème 2.1.5. Ainsi, pour tout $\lambda|\ell$ et $i\in[\![1,t_\lambda]\!]$ on a :
$$d_i=\frac{2h(2h-1)}{2}-\dim G_{\hat{V}_i}=\big(2h-\frac{1}{2}-\frac{r_i}{2}\big)\cdot r_i,$$
en particulier, on a
$$d_i=\frac{r_i(4h-1-r_i)}{2}.$$

Rappel : $\dim G_{\hat{V}_i}=\frac{(2h-r_i)(2h-r_i-1)}{2}$ car $\operatorname{codim}\hat{V}_i=2h-r_i$.

D'après le lemme 2.1.10, on sait que, pour tout nombre premier ℓ, on a l'égalité suivante, à des constantes multiplicatives près
$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathcal{O}_\lambda):G(H_\lambda))\gg\ll \ell^{f(\lambda)\sum_{i=1}^{t_\lambda}d_i(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}-m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})}.$$

Revenons maintenant au cas initial, grâce à l'équation (4.11), on trouve que
$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell):G(H))=\prod_{\lambda|\ell}(\mathrm{Hg(A)}(\mathcal{O}_\lambda):G(H_\lambda)),$$
par conséquent
$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell):G(H))\gg\ll \ell^{\sum_{\lambda|\ell}f(\lambda)\sum_{i=1}^{t_\lambda}d_i(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}-m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})}. \tag{4.13}$$

De façon équivalente, on a
$$\log_\ell(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell):G(H))=\sum_{\lambda|\ell}f(\lambda)\sum_{i=1}^{t_\lambda}d_i(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}-m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})+O(1),$$
par convention $m_\lambda^{t_\lambda+1}=0$.

Ainsi, lorsque l'on réinsère notre résultat dans l'équation (4.10), on obtient
$$[K(H):K]\gg\ll \ell^{\sum_{\lambda|\ell}f(\lambda)\sum_{i=1}^{t_\lambda}d_i(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)}-m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})}\cdot\delta(H).$$

L'idée est à présent d'obtenir une minoration de $\delta(H)$. Pour cela on introduit les deux entiers m_H et h_H définis de la façon suivante :

— On dénote par m_H l'entier maximal $m_H\geq 1$ tel que $\exists\, P,Q\in H$ d'ordre ℓ^{m_H} et tels que $e_\ell(\ell^{m_H-1}P,\ell^{m_H-1}Q)\in\mu_\ell$. Si un tel m_H n'existe pas on dira que $m_H=0$;

— On dénote par h_H l'entier minimal dans $[\![1,t_\lambda]\!]$ tel que $m^{h_H}\leq m_H$, dans le cas où $m_H=0$ on dira que $h_H=t_\lambda+1$.

On rappelle que l'on a les inclusions suivantes : $G_{\hat{V}_1} \subset ... \subset G_{\hat{V}_{t_\lambda}}$. On associe à chaque stabilisateur l'entier $\delta_{\lambda,i}$ pour $i \in [\![1, t_\lambda]\!]$ et $\lambda|\ell$ qui vaut soit 0 soit 1 en fonction du fait que $\hat{V}_i$ soit contenu dans un espace isotrope maximal ou pas. Étant donné que $\hat{V}_{t_\lambda} \subset ... \subset \hat{V}_1$ on remarque qu'à partir du moment où l'un des $\hat{V}_i$ n'est plus inclus dans un espace isotrope maximal, on aura $\delta_{\lambda,i} = ... = \delta_{\lambda,1} = 1$. Cette relation peut se traduire, en fonction de l'entier h_H défini précédemment, de la façon suivante :

$$\delta_{\lambda,1} = ... = \delta_{\lambda,t_\lambda+1-h_H} = 1 \quad \text{et} \quad \delta_{\lambda,t_\lambda+1-(h_H-1)} = ... = \delta_{\lambda,t_\lambda} = 0.$$

En effet, les entiers m et h ont été introduit de sorte que $\delta(H) \gg \ell^{m^{h_H}}$. On remarque que l'on peut exprimer m^{h_H} en fonction des $\delta_{\lambda,i}$ de la façon suivante :

$$m^{h_H} = \sum_{i=1}^{t_\lambda} (m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)} - m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})\delta_{\lambda,i}.$$

Ainsi, grâce au lemme 3.2.1, on déduit l'inégalité suivante à indice fini près :

$$[K(H) : K] \gg \ell^{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) \sum_{i=1}^{t_\lambda} d_i(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)} - m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})} \ell^{m^{h_H}},$$

donc

$$[K(H) : K] \gg \ell^{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda)(d_i+\delta_{\lambda,i})(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)} - m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})}.$$

On utilise à présent des arguments combinatoires, suivant le même raisonnement que dans le paragraphe 4.2 de [HiRa12]. On a l'équivalence suivante :

$$|H| = \ell^{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) a_{\lambda,i} m_\lambda^i} \ll [K(H) : K]^{\gamma(A)} \iff$$

$$\gamma(A) \gg \max \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) a_{\lambda,i} m_\lambda^i}{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda)(d_i + \delta_{\lambda,i})(m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)} - m_\lambda^{t_\lambda-(i-1)+1})} \right\}.$$

On rappelle que $a_{\lambda,i} = d\alpha_{\lambda,i}$ où $d = 2$.

Ainsi, en modifiant le dénominateur on obtient

$$\gamma(A) \gg \max \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) a_{\lambda,i} m_\lambda^i}{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) m_\lambda^i (d_{t_\lambda+1-i} + \delta_{\lambda,t_\lambda+1-i} - d_{t_\lambda+2-i} - \delta_{\lambda,t_\lambda+2-i})} \right\}.$$

Le maximum est pris sur $m_\lambda^{t_\lambda} < ... < m_\lambda^1$, on pose

$$M = \max_{m_\lambda^1 \geq ... \geq m_\lambda^{t_\lambda}} \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) a_{\lambda,i} m_\lambda^i}{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{t_\lambda} f(\lambda) m_\lambda^i (d_{t_\lambda+1-i} + \delta_{\lambda,t_\lambda+1-i} - d_{t_\lambda+2-i} - \delta_{\lambda,t_\lambda+2-i})} \right\}.$$

Grâce au lemme 2.8 de [HiRa12], on a

$$M = \max_{1 \leq k \leq t_\lambda} \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{k} f(\lambda) a_{\lambda,i}}{\sum_{\lambda|\ell} \sum_{i=1}^{k} f(\lambda)(d_{t_\lambda+1-i} + \delta_{\lambda,t_\lambda+1-i} - d_{t_\lambda+2-i} - \delta_{\lambda,t_\lambda+2-i})} \right\}.$$

Par convention, on a $d_{t_\lambda+1} = 0 = \delta_{\lambda,t_\lambda+1}$. On remarque que

$$r_{t_\lambda+1-k} := \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_\lambda} \hat{V}_{t_\lambda+1-k} = \sum_{i=1}^{k} a_{\lambda,i}.$$

Après simplifications, on obtient :

$$M = \max_{1 \leq k \leq t_\lambda} \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)(d_{t_\lambda+1-k} + \delta_{\lambda,t_\lambda+1-k})} \right\}.$$

Quitte à changer les indices, on peut supposer, sans perte de généralités que $\delta(H) = \delta(H_{\lambda'})$ pour une place λ' fixée au dessus de ℓ. Ainsi, $\forall \lambda|\ell$ telle que $\lambda \neq \lambda'$ on a $\delta_{\lambda,t_\lambda+1-k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, t_\lambda]\!]$. Ainsi,

$$M = \max_{1 \leq k \leq t_\lambda} \left\{ \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{\delta_{\lambda',t_{\lambda'}+1-k} + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) d_{t_\lambda+1-k}} \right\}.$$

Le maximum sera pris en fonction des valeurs prises par $\delta_{\lambda',t_\lambda+1-k}$. En effet, deux cas se présentent :

— Si $1 \leq k < h_H$ alors $t_{\lambda'}+1-k \in [\![t_{\lambda'}+2-h_H, t_{\lambda'}]\!]$ et par conséquent $\delta_{\lambda',t_{\lambda'}+1-k} = 0$.

— Si $h_H \leq k \leq t_{\lambda'}$ alors $t_{\lambda'}+1-k \in [\![1, t_{\lambda'}+1-h_H]\!]$ et par conséquent $\delta_{\lambda',t_{\lambda'}+1-k} = 1$.

On voit donc que ce maximum n'est autre que

$$M = \max \left\{ \max_{1 \leq k < h_H} \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) d_{t_\lambda+1-k}}, \max_{h_H \leq k < t_\lambda} \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{1 + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) d_{t_\lambda+1-k}} \right\}.$$

On rappelle que

$$d_{t_\lambda+1-k} = \frac{r_{t_\lambda+1-k}(4h - 1 - r_{t_\lambda+1-k})}{2}.$$

Posons alors

$$f_1(r_{t_\lambda+1-k}) = \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) \frac{r_{t_\lambda+1-k}(4h-1-r_{t_\lambda+1-k})}{2}}$$

et

$$f_2(r_{t_\lambda+1-k}) = \frac{\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) r_{t_\lambda+1-k}}{1 + \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) \frac{r_{t_\lambda+1-k}(4h-1-r_{t_\lambda+1-k})}{2}}$$

ainsi,

$$M = \max \left\{ \max_{1 \leq k < h_H} f_1(r_{t_\lambda+1-k}), \max_{h_H \leq k < t_\lambda} f_2(r_{t_\lambda+1-k}) \right\}.$$

Une étude de fonction nous permet de déduire que les deux fonctions f_1 et f_2 sont croissantes sur leur intervalles de définition. Par conséquent, elles atteignent leur maximum en $r_{t_\lambda+1-k} = h$ et $r_{t_\lambda+1-k} = 2h$ respectivement. En effet, lorsque un des V_i est contenu dans un espace isotrope maximal on remarque que son rang est au plus h. Le cas maximal pour f_2 correspond au cas où $H = \mathrm{A}[\ell^\infty]$. Ainsi

$$M = \max\left\{\frac{2}{3h-1}, \frac{2eh}{eh(2h-1)+1}\right\}.$$

On peut à présent se ramener à la fin du premier cas de la preuve. On remarque que le cas où $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ se réduit au cas où $H \subset \mathrm{A}[\ell]$. On conclut alors que

$$\gamma(A) = \frac{2(2eh)}{eh(2h-1)+1} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{Hg(A)}+1}.$$

□

4.2 Produits de variétés abéliennes

Grâce aux résultats de Ichikawa [Ich91] sur le groupe de Hodge d'un produit de variétés abéliennes, de Lombardo [Lom16] sur le groupe ℓ-adique du même produit et de Hindry et Ratazzi [HiRa16] on déduit le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soient $A_1, ..., A_d$ des variétés abéliennes deux à deux non isogènes. On suppose que chaque A_i est pleinement de type Lefschetz (*i.e. $\mathrm{H}_\ell(A_i) = \mathcal{L}(A_i)_{\mathbb{Q}_\ell}$*) et de type I, II ou III. Alors*

$$\mathrm{Hg}\left(\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{d}} \mathrm{A_i}\right) = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{d}} \mathrm{Hg(A_i)},$$

$$\forall \ell,\ \mathrm{H}_\ell\left(\prod_{i=1}^{d} A_i\right) = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{H}_\ell(A_i).$$

Preuve. En effet, ce résultat suit [Lom16, Théorème 4.1], qui peut se généraliser à un produit de d variétés abéliennes simples, pleinement de type Lefschetz et de type I, II et III. Le seul point à expliquer est la condition 3 de ce théorème. Dans [Lom16, Remarque 4.3], l'auteur explique tous les cas où la condition 3 est satisfaite. En effet lorsque A_i est une variété de type III, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_i$ est de type D_ℓ. Ainsi, étant donné que $\ell \neq 4$ on conclut que la condition 3 est toujours vérifiée.

□

Reprenons à présent la [HiRa16, Proposition 7.3] adaptée à notre cas, on rappelle que $d_i = 1$ lorsque A_i est de type I et $d_i = 2$ lorsque A_i est de type II ou III. Notons $I_\ell = \{(i, \lambda), i \in \{1, ..., d\}$ et λ est une place du centre de $\mathrm{End}(A_i) \otimes \mathbb{Q}$ au-dessus de $\ell\}$.

Proposition 4.2.1. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^d A_i$. Alors*

$$\mathrm{T}_\ell(A) = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{T}_\ell(A_i) = \bigoplus_{i=1}^{d} \big(\bigoplus_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda(A_i)^{d_i}\big) = \bigoplus_{(\lambda,i)\in I_\ell} \mathrm{T}_\lambda(A_i)^{d_i}.$$

On pose $\mathrm{A}_i[\lambda^\infty] = \cup_n \mathrm{T}_\lambda(A_i)/\ell^n \mathrm{T}_\lambda(A_i)$, *alors*

1. *Pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ et tout $H_{\lambda,i} \subset \mathrm{A}_i[\lambda^\infty]$, il existe un entier $m_{\lambda,i}$ tel que*
$$K(H_{\lambda,i}) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^{m_{\lambda,i}}});$$
2. *on a l'identité*
$$Gal(K(\mathrm{A}[\ell^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})) \simeq \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} Gal(K(\mathrm{A}_i[\lambda^\infty])/K(\mu_{\ell^\infty})).$$

Alors si $m := \max_{\lambda,i} m_{\lambda,i}$, pour tout sous-groupe fini

$$H = \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} \big(\bigoplus_{k=1}^{d_i} H_{\lambda,i}\big) \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$$

on a $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m})$ et

$$[K(H) : K(\mu_{\ell^m})] \gg\ll \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} [K(H_{\lambda,i}) : K(\mu_{\ell^{m_{\lambda,i}}})].$$

Cette dernière proposition peut être illustrée grâce au diagramme 4.5 suivant :

4.2.1 Produit de variétés abéliennes de type III

Dans la section 4.1, on a introduit le théorème 4.1.1 qui détermine l'invariant $\gamma(A)$ pour toute variété abélienne A simple, de type III et pleinement de type Lefschetz. On peut également énoncer un théorème semblable pour une variété abélienne A/K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^d A_i^{n_i}$ où $n_i \geq 1$ pour tout i et les A_i sont non $\overline{K}$-isogènes deux à deux, simples, de type III et pleinement de type Lefschetz. Soit ℓ un nombre premier tel que $\ell \notin \mathcal{S} = \cup_i \mathcal{S}_{A_i}$.

Théorème 4.2.2. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^d A_i^{n_i}$. On suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type III, pleinement de type Lefschetz et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$ où $d_i = 2$ (car toutes les variétés abéliennes sont de type*

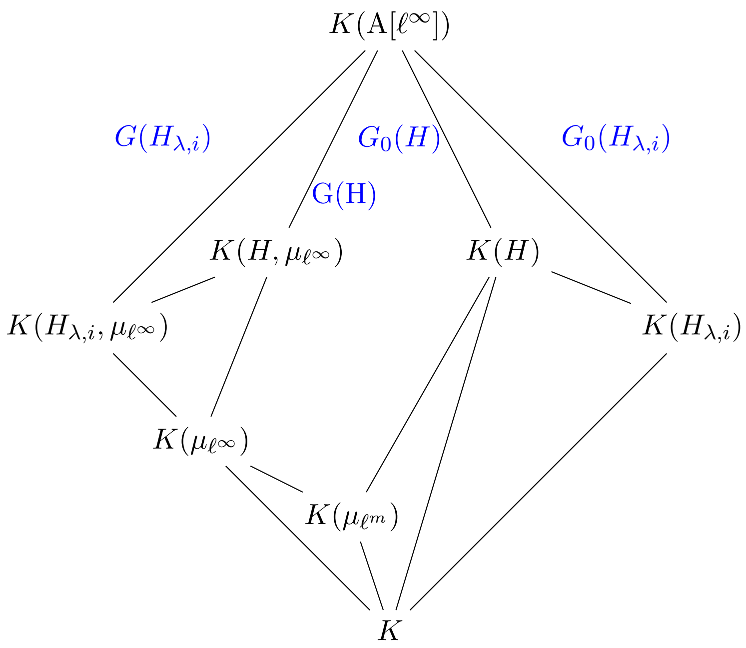

FIGURE 4.5 – Proposition 4.2.1

III), $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$ et h_i est la dimension relative. Alors on a l'invariant suivant :

$$\gamma(A) = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,d\}} \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\} = \max_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,d\}} \left\{ \frac{2\sum_{i=1}^{d} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i\in I} e_i(2h_i^2 - h_i)} \right\}.$$

Remarque. — On rappelle que $\mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i=i}}^{\mathrm{d}} \mathrm{A_i^{n_i}}) = \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i=i}}^{\mathrm{d}} \mathrm{A_i})$, voir [CF16] pour plus de détails.

— La preuve de ce théorème ressemble au deuxième point de la preuve concernant l'invariant $\gamma(A)$ pour une variété simple de type III. La méthode sera la suivante : dans un premier temps, on déterminera le cardinal d'un sous-groupe H de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$. Ensuite, on calculera le degré $[K(H) : K]$ et on conclura la preuve en utilisant des techniques combinatoires pour déterminer l'invariant $\gamma(A)$ (lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type III).

Avant de commencer la preuve du théorème 4.2.2 il est important de présenter le contexte général dans lequel on se situe.

Contexte

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i = d_i e_i h_i$. De plus on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples de type III, pleinement de type Lefschetz et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux.

Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ alors $H = \prod_{i=i}^{d} H_i^{n_i}$ où pour tout $i \in [\![1,d]\!]$ on a $H_i \subset \mathrm{A}_i[\ell^\infty]$ (voir [HiRa10, Paragraphe 4.2]).

Dans le but de déterminer l'invariant $\gamma(A)$ on devra, dans un premier temps, déterminer le cardinal de chaque sous-groupe H_i pour obtenir ainsi, le cardinal de $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$. Ensuite on déterminera la valeur de $[K(H) : K]$.

Soit $i \in [\![1,d]\!]$, on sait qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_i \subset \mathrm{A}_i[\ell^n]$, on a $\forall i \in [\![1,d]\!]$

$$H_i = \prod_{\lambda | \ell} \mathcal{H}_{\lambda,i}, \tag{4.14}$$

où $\forall i \in [\![1,d]\!]$ et $\forall \lambda | \ell$ on a

$$\mathcal{H}_{\lambda,i} = H_{\lambda,i} \oplus H_{\lambda,i},$$

car tous les A_i sont de types III.

Remarque. On remarque que pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a $\mathrm{T}_\ell(A_i) = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda(A_i) \oplus \mathrm{T}_\lambda(A_i)$.

Introduisons à présent l'ensemble suivant

$$I_\ell := \{(\lambda, i), i \in [\![1,d]\!] \text{ et } \lambda \text{ est une place de } \mathrm{End}^\circ(A_i) \text{ au-dessus de } \ell\}.$$

On peut réécrire le sous-groupe H de la façon suivante :

$$H = \prod_{(\lambda,i) \in I_\ell} \mathcal{H}_{\lambda,i}^{n_i}.$$

Notre but, dans un premier temps, est de déterminer le cardinal de H. Pour cela, on étudie son structure plus en détail. On se concentrera d'abord sur les sous-groupes $H_{\lambda,i}$, puis sur les sous-groupes H_i, et on conclura avec le sous-groupe H.

De plus, grâce à l'existence d'une base de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$ pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ on a

$$H_{\lambda,i} = \prod_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (\mathbb{Z}/\ell^{m^j}\mathbb{Z})^{\alpha_j f(\lambda)} \simeq \prod_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (\mathcal{O}_{\lambda,i}/\ell^{m^j}\mathcal{O}_{\lambda,i})^{\alpha_j},$$

où $1 \leq t_{\lambda,i} \leq 2h_i$, $f(\lambda)$ est le degré résiduel de λ par rapport à ℓ et $1 \leq m^{t_{\lambda,i}} < ... < m^1$.

En effet, α_j et m^j dépendent tous les deux de $(\lambda, i) \in I_\ell$, cependant pour simplifier l'écriture on gardera cette notation.

Cardinal de H En effet

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\lambda} H_{\lambda,i} = \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_{\lambda,i} = f(\lambda) \cdot \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j,$$

ainsi,

$$|H_{\lambda,i}| = \ell^{f(\lambda)\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j}.$$

Étant donné que $H_i = \prod_{\lambda|\ell} H_{\lambda,i} \oplus H_{\lambda,i}$ on a

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_i = d_i \cdot \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_{\lambda,i} \quad \text{et par conséquent} \quad |H_i| = \ell^{\sum_{\lambda|\ell} d_i f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |H| &= \prod_{i=1}^{d} |H_i|^{n_i} \\ &= \ell^{\sum_{i=1}^{d} n_i \sum_{\lambda|\ell} d_i f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j} \\ &= \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (n_i d_i \alpha_j) f(\lambda) m^j}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Notons l'entier $a_{ij} = d_i n_i \alpha_j$ qui dépend en fait de $(\lambda, i) \in I_\ell$, mais pour facilité des notations on ne le ferra pas apparaître. On obtient ainsi,

$$\log_\ell |H| = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{ij} f(\lambda) m^j \quad \text{où} \quad a_{ij} = d_i n_i \alpha_j = 2 n_i \alpha_j. \tag{4.16}$$

Calcul de $[K(H) : K]$ En effet, grâce à la propriété μ (voir section 3.2), on sait qu'il existe un entier m, associé au sous-groupe H tel que $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) \asymp K(\mu_{\ell^m})$. Ainsi pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & K(\mathrm{A}[\ell^\infty]) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(H) \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash] & & K(\mu_{\ell^\infty}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash] \\
 & K(\mu_{\ell^m}) \arrow[d, dash] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.6 – “Propriété μ”

Grâce au lemme 3.2.1 et à la proposition 4.2.1, on obtient l'égalité suivante à indice fini près :

$$\begin{aligned} [K(H) : K] &= [K(H) : K(\mu_{\ell^m})][K(\mu_{\ell^m}) : K] \\ &= (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \cdot \delta(H). \end{aligned} \tag{4.17}$$

De plus, grâce à la proposition 4.2.1 et aux faits que $\mathrm{Hg}(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})$ et que

$H_i = \prod_{\lambda|\ell}(H_{\lambda,i} \oplus H_{\lambda,i})$ on obtient les égalités suivantes à indice fini près :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) &= \prod_{i=1}^{d}(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathbb{Z}_\ell) : \mathrm{G(H_i)}) \\ &= \prod_{i=1}^{d}\prod_{\lambda|\ell}(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}) \\ &= \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell}(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Le but à présent sera de estimer pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ la valeur de

$$(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}). \tag{4.19}$$

Pour cela on utilisera le lemme 2.1.11. On va donc à présent définir nos stabilisateurs $G(H_{\lambda,i})$.

On introduit à présent pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ et tout $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$ les sous-modules $W_{i,j}$ de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$ tels que :

$$W_{i,j} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^{m^j}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_j},$$

et $\dim W_{i,j} = f(\lambda)\alpha_j$.

Ceci nous permet de donner une décomposition de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$:

$$\mathrm{T}_\lambda(A_i) = (\bigoplus_{j=1}^{t_{\lambda,i}} W_{i,j}) \oplus W'.$$

On introduit maintenant les sous-groupes $V_{i,j}$ définis comme suit :

$$V_{i,j} := \prod_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} (\mathbb{Z}/\ell^{m^k}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_k} \simeq \prod_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} (\mathcal{O}_{\lambda,i}/\ell^{m^k}\mathcal{O}_{\lambda,i})^{\alpha_k}$$

tels que $V_{i,t_{\lambda,i}} \subset ... \subset V_{i,1}$.

Notons $\hat{V}_{i,j}$ ses relevés dans $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$, on défini alors

$$r_{i,j} := \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{\lambda,i}}\ \hat{V}_{i,j} = \sum_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} \alpha_k.$$

Soient $G_{\hat{V}_{i,j}}$ les stabilisateurs de $\hat{V}_{i,j}$. Voici le lien entre ces stabilisateurs et le stabilisateur $G(H_{\lambda,i})$

$$G(H_{\lambda,i}) = \{M \in G(\mathcal{O}_{\lambda,i}),\, M \in G_{\hat{V}_{i,j}} \mod \ell^{m^{t_{\lambda,i}-(j-1)}}\, \forall\, j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]\}.$$

Soient $(\lambda, i) \in I_\ell$ et $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. On peut déterminer, grâce au théorème 2.1.5, la codimension $d_{i,j}$ des stabilisateurs $G_{\hat{V}_{i,j}} \subset \mathrm{GO}_{2\mathrm{h_i}}$.

$$d_{i,j} = \frac{2h_i(2h_i-1)}{2} - \dim G_{\hat{V}_{i,j}} = \big(2h_i - \frac{1}{2} - \frac{r_{i,j}}{2}\big) \cdot r_{i,j},$$

en particulier, on a

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i - 1 - r_{i,j})}{2}.$$

Ainsi, d'après le lemme 2.1.11, on sait que, pour tout nombre premier ℓ, on l'égalité suivante, à des constantes multiplicatives près

$$(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}) \gg\ll \ell^{\mathrm{f}(\lambda)\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{t}_{\lambda,\mathrm{i}}} \mathrm{d_{i,j}}(\mathrm{m}^{\mathrm{t}_{\lambda,\mathrm{i}}-(\mathrm{j}-1)} - \mathrm{m}^{\mathrm{t}_{\lambda,\mathrm{i}}-(\mathrm{j}-1)+1})}.$$

Revenons maintenant au cas initial, grâce à l'équation (4.18) on trouve, à indice fini près :

$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} (\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}),$$

par conséquent

$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \gg\ll \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda)\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} d_{i,j}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})}. \tag{4.20}$$

De façon équivalente, on a

$$\log_\ell(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} d_{i,j}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + O(1).$$

Preuve (Théorème 4.2.2)**.** D'après l'équation (4.17), il nous reste à déterminer $\delta(H)$, et plus particulièrement on donnera une minoration de cette valeur.

Quitte à changer les indices, on peut choisir un sous-groupe $H_1 \subset A_1[\ell^\infty]$ tel que $\delta(H) = \delta(H_{\lambda_1,1})$ où λ_1 est une place au dessus de ℓ fixée. Ainsi, on fixe $(\lambda_1, 1) \in I_\ell$ tel que $\delta(H) = \delta(H_{\lambda_1,1})$.

L'idée à présent est de minorer $\delta(H_{\lambda_1,1})$, pour cela on utilisera la propriété μ (voir section 3.2). On introduit à présent deux entiers $m_{H_{\lambda_1,1}}$ et $h_{H_{\lambda_1,1}}$ définis de la façon suivante :

- $m_{H_{\lambda_1,1}}$ est l'entier maximal tel qu'il existe $P, Q \in H_{\lambda_1,1}$ deux points d'ordre $\ell^{m_{H_{\lambda_1,1}}}$ tels que $e_\ell(\ell^{m_{H_{\lambda_1,1}}-1}P, \ell^{m_{H_{\lambda_1,1}}-1}Q) \in \mu_\ell$. Si un tel $m_{H_{\lambda_1,1}}$ n'existe pas, on pose $m_{H_{\lambda_1,1}} = 0$,
- $h_{H_{\lambda_1,1}} \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ est l'entier minimal tel que $m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} \leq m_{H_{\lambda_1,1}}$ (on rappelle que $m^{t_{\lambda_1,1}} < \ldots < m^1$, ainsi $m^{t_{\lambda_1,1}} < \ldots < m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} < m_{H_{\lambda_1,1}}$), lorsque $m_{H_{\lambda_1,1}} = 0$ on pose $h_{H_{\lambda_1,1}} = t_{\lambda_1,1} + 1$.

On définit les entiers $\delta_{1,j}$ pour tout $j \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ qui valent 0 ou 1 en fonction du fait que le module $\hat{V}_{1j}$ soit inclus dans un espace isotrope maximal ou pas. Autrement dit, on rappelle qu'on a la suite d'inclusions suivante :

$$\hat{V}_{1\,t_{\lambda_1,1}} \subset ... \subset \hat{V}_{1\,1}.$$

Ainsi, les $h_{H_{\lambda_1,1}} - 1$ premiers modules $\hat{V}_{1\,t_{\lambda_1,1}}, ..., \hat{V}_{1\,t_{\lambda_1,1}+1-(h_{H_{\lambda_1,1}}-1)}$ sont inclus dans un espace isotrope maximal, par définition de $h_{H_{\lambda_1,1}}$, et par conséquent on déduit que

$$\delta_{1,t_{\lambda_1,1}} = ... = \delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-(h_{H_{\lambda_1,1}}-1)} = 0. \tag{4.21}$$

Les derniers $t_{\lambda_1,1} - (h_{H_{\lambda_1,1}} - 1)$ modules $\hat{V}_{1\,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}}, ..., \hat{V}_{1\,1}$ ne sont pas inclus dans un espace isotrope maximal, ainsi

$$\delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}} = ... = \delta_{1,1} = 1. \tag{4.22}$$

On rappelle que l'idée est de minorer $\delta(H_{\lambda_1,1}) = \delta(H)$, en effet on a la minoration suivante :

$$\delta(H_{\lambda_1,1}) \gg \ell^{m^{h_{H_{\lambda_1,1}}}}.$$

On peut exprimer $m^{h_{H_1}}$ de la façon suivante :

$$m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} = \sum_{j=1}^{t_{\lambda_1,1}} (m^{t_{\lambda_1,1}-(j-1)} - m^{t_{\lambda_1,1}-(j-1)+1})\delta_{1,j},$$

par convention $m^{t_{\lambda_1,1}+1} = 0$.

Ainsi, d'après la proposition 4.2.1, on sait que $m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} \leq m_{\lambda_1,1} = \max_{\lambda,i} m_{\lambda,i}$, par conséquent on a pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ que

$$K(\mu_{\ell^{m_{\lambda,i}}}) \subseteq K(\mu_{\ell^{m^{h_{H_{\lambda_1,1}}}}}),$$

on peut alors supposer que pour tout couple $(\lambda, i) \neq (\lambda_1, 1)$, on a

$$\delta_{i,j} = 0 \quad \forall j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!].$$

Par conséquent on a

$$m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})\delta_{i,j}.$$

Revenons alors à notre minoration. On a, à des constantes multiplicatives près, l'inégalité suivante

$$\ell^{m^{h_{H_{\lambda_1,1}}}} = \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)}-m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})\delta_{i,j}} \ll \delta(H). \tag{4.23}$$

En regroupant les équations (4.20) et (4.23), on obtient la minoration de l'équation (4.17) suivante, à des constantes multiplicatives près

$$[K(H):K] \gg \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)}-m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})(f(\lambda)d_{i,j}+\delta_{i,j})},$$

ou de façon équivalente

$$\log_\ell[K(H):K] \geq \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})(f(\lambda)d_{i,j}+\delta_{i,j}) + O(1).$$

Cependant, par un changement de variable ($k = t_{\lambda,i}-(j-1)$), on peut exprimer les sommes différemment. Posons

$$b_{i,j} = f(\lambda)(d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}.$$

Ainsi

$$\log_\ell[K(H):K] \geq \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} m^j b_{i,j} + O(1). \tag{4.24}$$

On s'intéresse maintenant à l'aspect combinatoire de la preuve.

On souhaite déterminer l'invariant $\gamma(A)$ lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type III. Ainsi

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell[K(H):K]}.$$

Donc, grâce aux équations (4.16) et (4.24) on obtient l'équivalence suivante où les m^j dépendent de (λ, i)

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(A) \geq \max_{m^1>\ldots>m^{t_{\lambda,i}}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{i,j}f(\lambda)m^j}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} b_{i,j}m^j} \right\}. \tag{4.25}$$

D'après le [HiRa16, Lemme 2.7], on a la formulation suivante. Soient ℓ un nombre premier et $I_\ell = \{(\lambda, i), i \in [\![1, d]\!] \text{ et } \lambda|\ell\}$ un ensemble. Pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ on a des entiers $t_{\lambda,i}$ tels que $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. Soient $a_{i,j}f(\lambda)$ et $b_{i,j}$ des entiers strictement positifs qui dépendent du couple (λ, i). On a l'égalité

$$\sup_{\substack{m^1 \geq \ldots \geq m^{t_{\lambda,i}} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) m^j}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} b_{i,j} m^j} \right\} = \max_{\substack{1\leq h_{\lambda,i} \leq t_{\lambda,i} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda)}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j}} \right\}.$$

Montrons à présent que

$$\max_{\substack{1\leq h_{\lambda,i} \leq t_{\lambda,i} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda)}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j}} \right\} \leq \gamma(A). \tag{4.26}$$

On rappelle que

$$a_{ij} = d_i n_i \alpha_j = 2 n_i \alpha_j$$

$$b_{i,j} = f(\lambda)(d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1},$$

avec

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i - 1 - r_{i,j})}{2} \quad \text{avec} \quad r_{i,j} = \sum_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} \alpha_k.$$

On peut simplifier à présent le numérateur et le dénominateur du maximum considéré.

Numérateur

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_j,$$

or $\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_j = r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}$.

Ainsi

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}.$$

Dénominateur

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j} = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} (f(\lambda) d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} + \delta_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}),$$

or $\forall (\lambda, i) \neq (\lambda_1, 1)$ on a $\forall j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$ que $\delta_{i,j} = 0$, ainsi

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j} = \delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}} + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}},$$

où $h_{H_{\lambda_1,1}} \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ et

$$d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} = \frac{r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}(4h_i - 1 - r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}})}{2}.$$

Pour simplifier les notations on pose $r_i = r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}$, on obtient ainsi après simplification

$$\max_{\substack{1\leq h_{\lambda,i}\leq t_{\lambda,i}\\(\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{\delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}} + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda)\frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\} \leq \gamma(A), \tag{4.27}$$

où

$$\begin{cases} d_i = 2 \\ r_i = \sum_{k=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_k. \end{cases}$$

Maintenant, il faut séparer ce maximum en deux en fonction de la valeur de $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}}$. Étant donné que l'on a fixé le couple $(\lambda_1, 1) \in I_\ell$, on devra faire attention aux deux cas possibles.

— Si $1 \leq h_{\lambda_1,1} < h_{H_{\lambda_1,1}}$ alors $t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{\lambda_1,1} \in [\![t_{\lambda_1,1} + 2 - h_{H_{\lambda_1,1}}, t_{\lambda_1,1}]\!]$ et par conséquent $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} = 0$.

— Si $h_{H_{\lambda_1,1}} \leq h_{\lambda_1,1} \leq t_{\lambda_1,1}$ alors $t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{\lambda_1,1} \in [\![1, t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{H_{\lambda_1,1}}]\!]$ et par conséquent $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} = 1$.

Soit

$$\begin{aligned} M = \max_{(\lambda,i)\in I_\ell} \Bigg\{ & \max_{1\leq h_{\lambda_1,1}<h_{H_{\lambda_1,1}}} \left\{ \frac{2\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) r_i(4h_i - 1 - r_i)} \right\}, \\ & \max_{h_{H_{\lambda_1,1}}\leq h_{\lambda_1,1}\leq t_{\lambda_1,1}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{1 + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda)\frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Avant de majorer cet entier M, on modifiera un peu les sommes. En effet

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} e_i,$$

où $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$.

Par conséquent, soit $I \subset \{1, ..., d\}$ on a

$$\begin{aligned} M = \max_{I} \Bigg\{ & \max_{1\leq h_{\lambda_1,1}<h_{H_{\lambda_1,1}}} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i(4h_i - 1 - r_i)} \right\}, \\ & \max_{h_{H_{\lambda_1,1}}\leq h_{\lambda_1,1}\leq t_{\lambda_1,1}} \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i\frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

On souhaite majorer l'entier M, pour cela on prendra les maximums sur deux ensembles différents. On sait que pour tout $i \in I$ on a $r_i \leq 2h_i$, ainsi on note

$$\Delta := \{i \in I, \delta_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} = 1 \quad \forall h_{\lambda,i} \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!] \text{ et } t_{\lambda,i} \leq 2h_i\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} M \leq \max \Bigg\{ & \max_I \max_{I \backslash \Delta} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \right\}, \\ & \max_I \max_\Delta \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Montrons à présent que

$$\begin{aligned} \gamma(A) = \max \Bigg\{ & \max_I \max_{I \backslash \Delta} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \right\}, \\ & \max_I \max_\Delta \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour cela on introduit deux fonctions ρ_0 et ρ_1. Notons $\underline{n} = (n_1, ..., n_d)$, $\underline{g} = (g_1, ..., g_d)$ et $\underline{r} = (r_1, ..., r_d)$, ainsi on pose

$$\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \right\},$$

et

$$\rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \right\}.$$

Proposition 4.2.2. *On a l'inégalité suivante :*

$$\max\{\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}), \rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r})\} \leq \gamma(A).$$

Preuve. Montrons dans un premier temps que $\rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) \leq \gamma(A)$. Ou de façon équivalente que pour tout $I \subset \{1, ..., d\}$ on a

$$\frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}} \leq \gamma(A). \tag{4.32}$$

Notons à présent $\gamma = \gamma(A)$. En effet, montrer l'inégalité (4.32) est équivalent à montrer la suite d'équivalences suivantes. On remarquera que $4h_i - 1 - r_i > 0$ car $r_i \in [\![1, 2h_i]\!]$,

$h_i \geq 1$.

$$\begin{aligned}
(4.32) \iff & \textstyle\sum_I e_i d_i n_i r_i - \gamma - \sum_I \frac{e_i r_i \gamma}{2}(4h_i - 1 - r_i) \leq 0 \\
\iff & \textstyle\frac{\gamma}{2}\big(\sum_I \frac{2d_i n_i e_i r_i}{\gamma} - 2 - \sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - ri)\big) \leq 0 \\
\iff & \textstyle\sum_I \big(\frac{2d_i n_i e_i r_i}{\gamma} - e_i r_i (4h_i - 1 - ri)\big) - 2 \leq 0 \\
\iff & \textstyle\sum_I \big(e_i r_i^2 + e_i r_i (\frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1)\big) - 2 \leq 0 \\
\iff & \textstyle\sum_I e_i r_i \big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1\big) - 2 \leq 0
\end{aligned}$$

Question 4.2.1. Est-ce que $r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1 \leq 0$?

En effet

$$\begin{aligned}
r_i + \tfrac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1 \leq 0 \iff & \tfrac{2d_i n_i}{\gamma} \leq 4h_i - 1 - r_i \\
\iff & \tfrac{2d_i n_i}{4h_i - 1 - r_i} \leq \gamma.
\end{aligned}$$

Par définition de γ, on sait que $\forall i \in I$, on a

$$\frac{2n_i d_i e_i h_i}{1 + 2e_i h_i^2 - e_i g_i} \leq \gamma,$$

et par conséquent

$$\frac{2d_i n_i}{2h_i - 1 + \frac{1}{e_i h_i}} \leq \gamma.$$

Rappelons que l'on souhaite montrer que $\frac{2d_i n_i}{4h_i - 1 - r_i} \leq \gamma$ pour cela il suffit de comparer $2h_i - 1 + \frac{1}{e_i h_i}$ avec $4h_i - 1 - r_i$. Pour cela on sépare l'étude en deux cas possibles. Supposons que $r_i \leq 2h_i - 1$, ainsi

$$\begin{aligned}
r_i \leq 2h_i - 1 & \Rightarrow 4h_i - 1 - r_i \geq 4h_i + \eta_i - 2h_i + 1, \\
& \Rightarrow 4h_i - 1 - r_i \geq 2h_i + \eta_i + 1, \\
& \Rightarrow 4h_i - 1 - r_i \geq 2h_i + \eta_i + \tfrac{1}{e_i h_i}.
\end{aligned}$$

Supposons à présent que $r_i = 2h_i$. On remarque que l'on ne peut pas utiliser le même raisonnement qu'auparavant car $2h_i - 1 + \frac{1}{e_i h_i} \geq 4h_i - 1 - r_i = 2h_i - 1$. Ainsi pour montrer que $\frac{2d_i n_i}{4h_i - 1 - r_i} \leq \gamma$ on revient à la définition de γ. Soit $I' = \{i \in I, r_i = 2g_i\}$, on sait que

$$(4.32) \iff \sum_I e_i r_i \big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - 1\big) - 2 \leq 0$$

On sait que le terme de gauche de l'inégalité est négatif et peut être majoré comme suit :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_I e_i r_i \big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - 1\big) - 2 & \leq \textstyle\sum_{I'} e_i r_i \big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - 1\big) - 2 \\
& = \textstyle\sum_{I'} \frac{4h_i d_i n_i e_i}{\gamma} - \sum_{I'} (4h_i^2 e_i + 2h_i e_i) - 2.
\end{aligned}$$

On déduit alors que le terme de droite est négatif si et seulement si

$$\frac{\sum_{I'} 2h_i d_i n_i e_i}{1+\sum_{I'}(2h_i^2 e_i + h_i e_i)} \leq \gamma.$$

Étant donné la définition de $\gamma = \gamma(A) := \max_I \left\{ \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1+\sum_I 2e_i h_i^2 - e_i h_i} \right\}$ on remarque que la dernière inégalité est vérifiée.

La réponse à la question 4.2.1 est que l'on a pour tout $i \in [\![1, ..., d]\!]$ et pour tout $r_i \leq 2h_i$ que $r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1 \leq 0$.

Grâce à cette réponse on obtient l'inégalité suivante, qui comme énoncée précédemment, est équivalente à montrer l'inégalité (4.32).

$$\sum_I e_i r_i \big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i + 1\big) - 2 \leq 0.$$

On conclut alors que

$$\rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1+\sum_I e_i \frac{r_i(4h_i - 1 - r_i)}{2}} \right\} \leq \gamma.$$

Un calcul semblable nous permet de montrer que

$$\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \right\} \leq \gamma.$$

Détaillons ce calcul à présent. Montrer l'inégalité précédente revient à montrer que pour tout $I \subset \{1, ..., d\}$ on a

$$\frac{\sum_I 2e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \leq \gamma. \tag{4.33}$$

L'inégalité (4.33) est équivalente à

$$\sum_I e_i r_i (2d_i n_i - \gamma(4h_i - 1 - r_i)) \leq 0.$$

Étant donné que $r_i > 0$ pour tout i, il suffit de montrer que $2d_i n_i - \gamma(4h_i - 1 - r_i) \leq 0$. Ceci est équivalent à montrer que

$$\frac{2d_i n_i}{4h_i - 1 - r_i} \leq \gamma.$$

Or, d'après la question 4.2.1, on sait que cette inégalité est bien vérifiée. On conclut alors que

$$\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i - 1 - r_i)} \right\} \leq \gamma.$$

Par conséquent

$$\max\{\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}),\rho_1(\underline{n},\underline{g},\underline{r})\}\leq\gamma(A).$$

$\square$

Montrons que

$$\max\{\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}),\rho_1(\underline{n},\underline{g},\underline{r})\}=\max_I\left\{\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2-e_ih_i}\right\}=\gamma(A).$$

Ou, de façon équivalente, montrons que

$$\max\left\{\max_I\max_{I\setminus\Delta}\left\{\frac{2\sum_I e_id_in_ir_i}{\sum_I e_ir_i(4h_i-1-r_i)}\right\},\max_I\max_{\Delta}\left\{\frac{\sum_I e_id_in_ir_i}{1+\sum_I e_i\frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}}\right\}\right\}$$
$$=\max_I\left\{\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2-e_ih_i}\right\}.$$

Pour cela, on remarque que pour $r_i=2h_i$ le maximum est atteint. De plus on remarque que pour tout $r_i\leq 2h_i$, on a

$$\frac{\sum_I e_id_in_ir_i}{1+\sum_I e_i\frac{r_i(4h_i-1-r_i)}{2}}\leq\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2-e_ih_i}.$$

Il nous reste dons à montrer que pour tout $i\in I$ on a

$$\frac{2\sum_I e_id_in_ir_i}{\sum_I e_ir_i(4h_i-1-r_i)}\leq\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2-e_ih_i}.$$

Une étude de fonction nous permet de montrer que

$$\frac{2\sum_I e_id_in_ir_i}{\sum_I e_ir_i(4h_i-1-r_i)}\leq\frac{2\sum_I e_id_in_ih_i}{\sum_I e_ih_i(4h_i-1-h_i)},$$

montrons donc que

$$\frac{2\sum_I e_id_in_ih_i}{\sum_I e_ih_i(3h_i-1)}\leq\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2-e_ih_i},$$

ce qui est équivalent à montrer

$$1+\sum_I(2e_ih_i^2-e_ih_i)-\sum_I e_ih_i(3h_i-1)\leq 0,$$

ou bien

$$1-\sum_I e_ih_i^2\leq 0$$

Cette inégalité est vérifiée car $e_i h_i^2 > 1$.

Remarque. Les seuls cas où $e_i h_i^2 = 1$ correspondent aux cas où $e_i = 1$ et $h_i = 1$. Ainsi le seul cas possible est lorsque chaque A_i est de type II. C'est le cas d'une courbe elliptique sans multiplication complexe, ou bien une surface abélienne telle que son groupe de Mumford-Tate soit GL_2. Or dans notre cas tous les A_i sont des variétés abéliennes de type III, donc ce cas là peut être exclu.

□

4.2.2 Produit de variétés abéliennes de type I, II et III

On introduit à présent un résultat analogue au [HiRa16, Théorème 1.14] concernant l'invariant γ pour un produit de variétés abéliennes de type I, II et III.

Théorème 4.2.3. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$. De plus, on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type I, II ou III, pleinement de type Lefschetz et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux. Pour tout sous ensemble non vide $I \subset \{1, ..., d\}$, on note $A_I := \prod_{i\in I} A_i$. On note $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$ où $E_i = Cent(\mathrm{End}^\circ(A_i))$, $h_i = \dim_{\mathrm{rel}} A_i$. On pose également*

$$d_i = \begin{cases} 1 \text{ si } A_i \text{ de type I,} \\ 2 \text{ si } A_i \text{ de type II ou III,} \end{cases} \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 \text{ si } A_i \text{ de type I ou II,} \\ -1 \text{ si } A_i \text{ de type III.} \end{cases}$$

Alors on a l'invariant suivant :

$$\gamma(A) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\} = \max_I \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i\in I} 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i} \right\}.$$

Remarque.

— En effet, d'après [HiRa16, Théorème 1.6] (respectivement le théorème 4.1.1) on connaît l'invariant $\gamma(A)$ lorsque la variété abélienne A est simple de type I ou II (respectivement de type III). De façon plus générale, on connaît cet invariant lorsque la variété abélienne A est un produit de variétés abéliennes de type I et II [HiRa16, Théorème 1.14] et lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type III (théorème 4.2.2).

— La preuve de ce théorème s'inspire de celle du [HiRa16, Théorème 1.14] développée dans [HiRa16, Paragraphe 7]. Cependant, la différence majeur avec cette preuve est le fait que l'on ne se concentre pas sur la structure du stabilisateur comme cela a été traité dans [HiRa16]. En suivant les mêmes techniques que celles présentées dans les paragraphes précédents, on peut déterminer la codimension de ces stabilisateurs (voir théorème 2.1.7).

— La preuve de ce théorème ressemble à celle concernant l'invariant $\gamma(A)$ lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type III. La méthode sera la suivante : dans un premier temps, on déterminera le cardinal d'un sous-groupe H de $\mathrm{A}[\ell^\infty]$; on calculera ensuite le degré $[K(H):K]$. On conclura la preuve en utilisant des techniques combinatoires pour déterminer l'invariant $\gamma(A)$ (lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type I, II et III).

On séparera cette section en deux parties, la première sera consacrée à présenter la situation et la deuxième à décrire la preuve du théorème 4.2.3.

Contexte

Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$. De plus, on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type I, II ou III, pleinement de type Lefschetz et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux.

Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$ alors $H = \prod_{i=i}^{d} H_i^{n_i}$ où pour tout $i \in [\![1,d]\!]$ on a $H_i \subset \mathrm{A}_i[\ell^\infty]$ (voir [HiRa10, Paragraphe 4.2]).

Dans le but de déterminer l'invariant $\gamma(A)$, on devra, dans un premier temps, déterminer le cardinal de chaque sous-groupe H_i pour obtenir ainsi le cardinal de $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$. Ensuite, on déterminera la valeur de $[K(H):K]$.

Soit $i \in [\![1,d]\!]$, on sait qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_i \subset \mathrm{A}_i[\ell^n]$, on a $\forall i \in [\![1,d]\!]$

$$H_i = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{H}_{\lambda,i}, \tag{4.34}$$

où $\forall i \in [\![1,d]\!]$ et $\forall \lambda|\ell$ on a

$$\mathcal{H}_{\lambda,i} = \begin{cases} H_{\lambda,i} \text{ si } A_i \text{ de type I,} \\ H_{\lambda,i} \oplus H_{\lambda,i} \text{ si } A_i \text{ de type II ou III.} \end{cases}$$

Remarque. On remarque que pour tout $i \in [\![1,d]\!]$ on a $\mathrm{T}_\ell(A_i) = \prod_{\lambda|\ell} \bigoplus_{k=1}^{d_i} \mathrm{T}_\lambda(A_i)$.

Introduisons à présent l'ensemble suivant

$$I_\ell := \{(\lambda, i), i \in [\![1,d]\!] \text{ et } \lambda \text{ est une place de } \operatorname{End}^\circ(A_i) \text{ au-dessus de } \ell\}.$$

On peut réécrire le sous-groupe H de la façon suivante :

$$H = \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} \mathcal{H}_{\lambda,i}^{n_i}.$$

Notre but, dans un premier temps, est de déterminer le cardinal de H. Cela nécessite d'étudier plus en détail sa structure. C'est donc pour cela que l'on se concentrera d'abord sur les sous-groupes $H_{\lambda,i}$, ensuite sur les sous-groupes H_i pour conclure avec le sous-groupe H.

De plus, grâce à l'existence d'une base de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$ pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$, on a

$$H_{\lambda,i} = \prod_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (\mathbb{Z}/\ell^{m^j}\mathbb{Z})^{\alpha_j f(\lambda)} \simeq \prod_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (\mathcal{O}_{\lambda,i}/\ell^{m^j}\mathcal{O}_{\lambda,i})^{\alpha_j},$$

où $1 \leq t_{\lambda,i} \leq 2h_i$, $f(\lambda)$ est le degré résiduel de λ par rapport à ℓ et $1 \leq m^{t_{\lambda,i}} < ... < m^1$.

En effet, α_j et m^j dépendent tous les deux de $(\lambda, i) \in I_\ell$, cependant pour simplifier l'écriture, on gardera cette notation.

Cardinal de H On peut à présent déterminer le cardinal du sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$.

En effet

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\lambda} H_{\lambda,i} = \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_{\lambda,i} = f(\lambda) \cdot \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j,$$

ainsi

$$|H_{\lambda,i}| = \ell^{f(\lambda)\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j}.$$

Étant donné que $H_i = \prod_{\lambda|\ell} \bigoplus_{k=1}^{d_i} H_{\lambda,i}$ on a

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_i = d_i \cdot \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_\ell} H_{\lambda,i} \quad \text{et par conséquent} \quad |H_i| = \ell^{\sum_{\lambda|\ell} d_i f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |H| &= \prod_{i=1}^{d} |H_i|^{n_i} \\ &= \ell^{\sum_{i=1}^{d} n_i \sum_{\lambda|\ell} d_i f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} \alpha_j m^j} \\ &= \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (n_i d_i \alpha_j) f(\lambda) m^j}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Notons l'entier $a_{ij} = d_i n_i \alpha_j$ qui dépend en fait de $(\lambda, i) \in I_\ell$, mais pour simplifier les notations on ne le fera pas apparaître. On obtient ainsi

$$\log_\ell |H| = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{ij} f(\lambda) m^j \quad \text{où} \quad a_{ij} = \begin{cases} n_i\alpha_j & \text{si } A_i \text{ est de type I,} \\ 2n_i\alpha_j & \text{si } A_i \text{ est de type II ou III.} \end{cases} \tag{4.36}$$

Calcul de $[K(H) : K]$ En effet, grâce à la propriété μ, on sait qu'il existe un entier m, associé au sous-groupe H tel que $K(H) \cap K(\mu_{\ell^\infty}) = K(\mu_{\ell^m})$. Ainsi, pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& K(\mathrm{A}[\ell^\infty]) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(H) \arrow[dr, dash] \arrow[ddr, dash] & & K(\mu_{\ell^\infty}) \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash] \\
& K(\mu_{\ell^m}) \arrow[d, dash] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.7 – “Propriété μ”

Grâce au diagramme, on obtient l'égalité suivante à indice fini près

$$\begin{aligned}
[K(H):K] &= [K(H):K(\mu_{\ell^m})][K(\mu_{\ell^m}):K] \\
&= (\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell):G(H)) \cdot \delta(H).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

De plus, grâce à la proposition 4.2.1 et aux faits que $\mathrm{Hg}(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})$ et que $H_i = \prod_{\lambda|\ell} H_{\lambda,i} \oplus H_{\lambda,i}$, on obtient les égalités suivantes à indice fini près :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hg}(\mathrm{A})(\mathbb{Z}_\ell):G(H)) &= \prod_{i=1}^{d} (\mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})(\mathbb{Z}_\ell):\mathrm{G(H_i)}) \\
&= \prod_{i=1}^{d} \prod_{\lambda|\ell} (\mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}):\mathrm{G}(\mathrm{H}_{\lambda,\mathrm{i}})) \\
&= \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} (\mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}):\mathrm{G}(\mathrm{H}_{\lambda,\mathrm{i}}))
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Le but à présent sera donc de estimer pour tout $(\lambda,i) \in I_\ell$ la valeur de

$$(\mathrm{Hg}(\mathrm{A_i})(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}):\mathrm{G}(\mathrm{H}_{\lambda,\mathrm{i}})). \tag{4.39}$$

Pour cela, on utilisera le lemme 2.1.11. On va donc à présent définir nos stabilisateurs $G(H_{\lambda,i})$.

On introduit à présent pour tout $(\lambda,i) \in I_\ell$ et tout $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$ les sous-modules $W_{i,j}$ de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$ tels que :

$$W_{i,j} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^{m^j}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_j},$$

et $\dim W_{i,j} = f(\lambda)\alpha_j$.

Ceci nous permet de donner une décomposition de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$:

$$\mathrm{T}_\lambda(A_i) = (\bigoplus_{j=1}^{t_{\lambda,i}} W_{i,j}) \oplus W'.$$

On introduit maintenant les sous-groupes $V_{i,j}$ définis comme suit :

$$V_{i,j} := \prod_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} (\mathbb{Z}/\ell^{m^k}\mathbb{Z})^{f(\lambda)\alpha_k} \simeq \prod_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} (\mathcal{O}_{\lambda,i}/\ell^{m^k}\mathcal{O}_{\lambda,i})^{\alpha_k}$$

tels que $V_{i,t_{\lambda,i}} \subset ... \subset V_{i,1}$.

Notons $\hat{V}_{i,j}$ ses relevés dans $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$, on défini alors

$$r_{i,j} := \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{\lambda,i}} \hat{V}_{i,j} = \sum_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} \alpha_k.$$

Remarque. En effet, la même étude mais pour les sous-groupes H_i a déjà été faite pour une variété abélienne A_i simple de type III (preuve 4.1). Cependant cela est nouveau lorsque la variété abélienne A_i est simple de type I ou II. L'étude faite aux [HiRa16, Paragraphes 6 et 7] analyse plus en détail la structure des stabilisateurs. Dans notre cas, on fera un zoom out de cette structure.

Soient $G_{\hat{V}_{i,j}}$ les stabilisateurs de $\hat{V}_{i,j}$. Voici le lien entre ces stabilisateurs et le stabilisateur $G(H_{\lambda,i})$

$$G(H_{\lambda,i}) = \{M \in G(\mathcal{O}_{\lambda,i}),\, M \in G_{\hat{V}_{i,j}} \mod \ell^{m^{t_{\lambda,i}-(j-1)}} \forall j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]\}.$$

Remarque. Pour utiliser le lemme 2.1.11, on doit connaître la codimension des stabilisateurs $G_{\hat{V}_{i,j}}$ pour tous les types de variétés abéliennes. En effet, le théorème 2.1.7 donne cette codimension lorsque la variété A_i est de type I, II ou III.

Soient $(\lambda, i) \in I_\ell$ et $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. On peut déterminer, grâce aux théorèmes 2.1.5 et 2.1.6, la codimension $d_{i,j}$ des stabilisateurs $G_{\hat{V}_{i,j}}$ en fonction du type de la variété abélienne A_i, *i.e.* lorsque $G_{V_{i,j}} \subset \mathrm{GSp}_{2\mathrm{h}_\mathrm{i}}$ (A_i de type I ou II) ou $G_{\hat{V}_{i,j}} \subset \mathrm{GO}_{2\mathrm{h}_\mathrm{i}}$ (A_i de type III).

1. Si A_i de type I ou II, alors

$$d_{i,j} = \frac{2h_i(2h_i+1)}{2} - \dim G_{\hat{V}_{i,j}} = \big(2h_i + \frac{1}{2} - \frac{r_{i,j}}{2}\big) \cdot r_{i,j},$$

   en particulier on a

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i + 1 - r_{i,j})}{2}.$$

2. Si A_i de type III, alors

$$d_{i,j} = \frac{2h_i(2h_i-1)}{2} - \dim G_{\hat{V}_{i,j}} = \big(2h_i - \frac{1}{2} - \frac{r_{i,j}}{2}\big) \cdot r_{i,j},$$

en particulier on a

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i - 1 - r_{i,j})}{2}.$$

On déduit alors une formule générale pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$ et tout $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. Soit A_i une variété abélienne simple, soit $\hat{V}_{i,j}$ un sous-module de $\mathrm{T}_\lambda(A_i)$ de rang $r_{i,j}$. Alors le stabilisateur $G_{\hat{V}_{i,j}}$ est de codimension

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i + \eta_i - r_{i,j})}{2} \qquad \text{où} \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est de type I ou II,} \\ -1 & \text{si } A \text{ est de type III.} \end{cases} \tag{4.40}$$

On rappelle que $r_{i,j} = \sum_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} \alpha_k$.

Ainsi, d'après le lemme 2.1.11 on sait que, pour tout nombre premier ℓ, on l'égalité suivante, à des constantes multiplicatives près

$$(\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}) \gg\ll \ell^{\mathrm{f}(\lambda)\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{t_{\lambda,i}}} \mathrm{d_{i,j}}(\mathrm{m}^{\mathrm{t_{\lambda,i}-(j-1)}} - \mathrm{m}^{\mathrm{t_{\lambda,i}-(j-1)+1}})},$$

car $\lambda = \ell^{f(\lambda)}$.

Revenons maintenant au cas initial, grâce à l'équation (4.38), on trouve que

$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} (\mathrm{Hg(A_i)}(\mathcal{O}_{\lambda,\mathrm{i}}) : \mathrm{G(H_{\lambda,i})}),$$

par conséquent

$$(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) \gg\ll \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda)\sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} d_{i,j}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})}. \tag{4.41}$$

De façon équivalente, on a

$$\log_\ell(\mathrm{Hg(A)}(\mathbb{Z}_\ell) : G(H)) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} d_{i,j}(m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + O(1),$$

où $\forall(\lambda, i) \in I_\ell$ et $\forall j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$ on a l'équation (4.40) pour la codimension $d_{i,j}$.

Il nous reste à présent à déterminer le deuxième facteur de l'équation (4.37). On va donc donner une minoration de $\delta(H)$ pour notre sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$. Rappelons que

$$H = \prod_{(\lambda,i)\in I_\ell} (\bigoplus_{k=1}^{d_i} H_{\lambda,i})^{n_i},$$

ainsi, on fixe $(\lambda_1, 1) \in I_\ell$, tel que $\delta(H) = \delta(H_{\lambda_1,1})$. Plus précisément, quitte à changer les indices, on peut choisir un sous-groupe $H_1 \subset \mathrm{A}_i[\ell^\infty]$ tel que $H_1 = \prod_{\lambda|\ell} \bigoplus_{k=1}^{d_1} H_{\lambda,1}$. On fixe ensuite une place λ_1 de $\mathrm{End}^\circ(A_i)$ au-dessus de ℓ telle que $H_{\lambda_1,1} \subset A_1[\lambda_1^\infty]$. Ainsi, grâce à la proposition 4.2.1 et le fait que $\delta(H) = \delta(H_{\lambda_1,1})$ on obtient que

$$m := \max_{\lambda,i} m_{\lambda,i} = m_{\lambda_1,1}.$$

Comme dans la preuve du théorème 4.2.2, on introduit les deux entiers suivants :

— $m_{\lambda_1,1}$ est l'entier maximal tel qu'il existe $P, Q \in H_{\lambda_1,1}$ deux points d'ordre $\ell^{m_{\lambda_1,1}}$ tels que $e_{\lambda^n}(P,Q)$ est d'ordre $\ell^{m_{\lambda_1,1}}$. Si un tel $m_{\lambda_1,1}$ n'existe pas on pose $m_{\lambda_1,1} = 0$,

— $h_{H_{\lambda_1,1}} \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ est l'entier minimal tel que $m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} \leq m_{\lambda_1,1}$ (on rappelle que $H_{\lambda_1,1} = \prod_{j=1}^{t_{\lambda_1,1}} (\mathbb{Z}/\ell^{m^j}\mathbb{Z})^{\alpha_j f(\lambda_1)}$ où, pour tout $j \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ on a une suite décroissante d'entiers $1 \leq m^{t_{\lambda_1,1}} < \dots < m^1$ qui dépendent en fait de $(\lambda_1, 1) \in I_\ell$. Lorsque $m_{\lambda_1,1} = 0$ on pose $h_{H_{\lambda_1,1}} = t + 1$.

On a, à des constantes multiplicatives près, la minoration suivante :

$$\ell^{m^{h_{H_{\lambda_1,1}}}} \ll \delta(H_{\lambda_1,1}) = \delta(H).$$

On peut à présent définir, pour tout $j \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$, les entiers $\delta_{1,j}$.

On rappelle que l'on a les inclusions suivantes des sous-modules $\hat{V}_{i,j}$ définis précédemment.

$$\underbrace{\hat{V}_{1,t_{\lambda_1,1}} \subset \dots \subset \hat{V}_{1,t_{\lambda_1,1}+1-(h_{H_{\lambda_1,1}}-1)}}_{\text{inclus dans un espace isotrope maximal}} \subset \underbrace{\hat{V}_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}} \subset \dots \subset \hat{V}_{1,1}}_{\text{pas inclus}}$$

et par conséquent

$$\delta_{1,t_{\lambda_1,1}} = \dots = \delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-(h_{H_{\lambda_1,1}}-1)} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{H_{\lambda_1,1}}} = \dots = \delta_{1,1} = 1.$$

Remarque. On a

$$m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} = \sum_{j=1}^{t_{\lambda_1,1}} (m^{t_{\lambda_1,1}-(j-1)} - m^{t_{\lambda_1,1}-(j-1)+1})\delta_{1,j}.$$

Par convention on pose $m^{t_{\lambda_1,1}+1} = 0$.

Ainsi, d'après la proposition 4.2.1, on sait que $m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} \leq m_{\lambda_1,1} = m = \max_{\lambda,i} m_{\lambda,i}$, par conséquent, on a pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$

$$K(\mu_{\ell^{m_{\lambda,i}}}) \subseteq K(\mu_{\ell^{m^{h_{H_{\lambda_1,1}}}}}),$$

on peut alors supposer que pour tout couple $(\lambda, i) \neq (\lambda_1, 1)$, on a

$$\delta_{i,j} = 0 \quad \forall\, j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!].$$

Par conséquent, on a

$$m^{h_{H_{\lambda_1,1}}} = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})\delta_{i,j}.$$

Revenons alors à notre minoration. On a, à des constantes multiplicatives près, l'inégalité suivante

$$\ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})\delta_{i,j}} \ll \delta(H). \tag{4.42}$$

En regroupant les équations (4.41) et (4.42) on obtient la minoration de l'équation (4.37) suivante, à des constantes multiplicatives près

$$[K(H) : K] \gg \ell^{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})(f(\lambda)d_{i,j}+\delta_{i,j})},$$

ou de façon équivalente

$$\log_\ell [K(H) : K] \geq \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} (m^{t_{\lambda,i}-(j-1)} - m^{t_{\lambda,i}-(j-1)+1})(f(\lambda)d_{i,j} + \delta_{i,j}) + O(1).$$

Cependant, par un changement de variable ($k = t_{\lambda,i} - (j-1)$), on peut exprimer les sommes différemment, posons

$$b_{i,j} = f(\lambda)(d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}.$$

Ainsi

$$\log_\ell [K(H) : K] \geq \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} m^j b_{i,j} + O(1). \tag{4.43}$$

Preuve du théorème concernant le produit de variétés abéliennes de type I, II et III

Dans le but de fournir une preuve de ce théorème, on va suivre la même démarche que dans la preuve du théorème 4.2.2. On a déjà introduit toutes les notions nécessaires pour poursuivre la preuve. On s'intéressera maintenant à l'aspect combinatoire de la preuve.

Preuve. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. On souhaite déterminer l'invariant $\gamma(A)$ lorsque A est un produit de variétés abéliennes de type I, II ou III. Ainsi

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(A) \geq \frac{\log_\ell |H|}{\log_\ell [K(H):K]}.$$

Donc, grâce aux équations (4.36) et (4.43), on obtient l'équivalence suivante où les m^j dépendent de (λ, i)

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma(A) \geq \max_{m^1 > \ldots > m^{t_{\lambda,i}}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) m^j}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} b_{i,j} m^j} \right\}. \tag{4.44}$$

D'après le [HiRa16, Lemme 2.7], on a la formulation suivante. Soient ℓ un nombre premier et $I_\ell = \{(\lambda, i), i \in [\![1, d]\!] \text{ et } \lambda | \ell\}$ un ensemble. Pour tout $(\lambda, i) \in I_\ell$, on a des entiers $t_{\lambda,i}$ tels que $j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$. Soient $a_{i,j} f(\lambda)$ et $b_{i,j}$ des entiers strictement positifs qui dépendent du couple (λ, i). On a l'égalité

$$\sup_{\substack{m^1 \geq \ldots \geq m^{t_{\lambda,i}} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) m^j}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{t_{\lambda,i}} b_{i,j} m^j} \right\} = \max_{\substack{1 \leq h_{\lambda,i} \leq t_{\lambda,i} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda)}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j}} \right\}.$$

Montrons à présent que

$$\max_{\substack{1 \leq h_{\lambda,i} \leq t_{\lambda,i} \\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda)}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j}} \right\} \leq \gamma(A).$$

On rappelle que

$$a_{ij} = d_i n_i \alpha_j = \begin{cases} n_i \alpha_j & \text{si } A_i \text{ est de type I,} \\ 2 n_i \alpha_j & \text{si } A_i \text{ est de type II ou III,} \end{cases}$$

$$b_{i,j} = f(\lambda)(d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - d_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1}) + \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)} - \delta_{i,t_{\lambda,i}-(j-1)+1},$$

avec

$$d_{i,j} = \frac{r_{i,j}(4h_i + \eta_i - r_{i,j})}{2} \qquad \text{où} \qquad \eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est de type I ou II,} \\ -1 & \text{si } A \text{ est de type III,} \end{cases}$$

et $r_{i,j} = \sum_{k=1}^{t_{\lambda,i}-(j-1)} \alpha_k$.

Avec ces rappels on peut simplifier le numérateur et le dénominateur du maximum considéré.

Numérateur

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i \sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_j,$$

or $\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_j = r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}$.

Ainsi

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} a_{i,j} f(\lambda) = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}.$$

Dénominateur

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j} = \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} (f(\lambda) d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} + \delta_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}),$$

or $\forall(\lambda, i) \neq (\lambda_1, 1)$, $\forall j \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!]$, $\delta_{i,j} = 0$, ainsi

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell}\sum_{j=1}^{h_{\lambda,i}} b_{i,j} = \delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}},$$

où $h_{\lambda_1,1} \in [\![1, t_{\lambda_1,1}]\!]$ et

$$d_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} = \frac{r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}(4h_i + \eta_i - r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}})}{2}.$$

Pour simplifier les notations, on pose $r_i = r_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}}$. On obtient ainsi après simplification

$$\max_{\substack{1\le h_{\lambda,i}\le t_{\lambda,i}\\ (\lambda,i)\in I_\ell}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{\delta_{1,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\} \le \gamma(A),$$

où

$$\begin{cases} d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est de type I,} \\ 2 & \text{si } A \text{ est de type II ou III,} \end{cases} \\ \eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est de type I ou II,} \\ -1 & \text{si } A \text{ est de type III,} \end{cases} \\ r_i = \sum_{k=1}^{h_{\lambda,i}} \alpha_k. \end{cases}$$

Maintenant, il faut séparer ce maximum en deux en fonction de la valeur de $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}}$. Étant donné que l'on a fixé le couple $(\lambda_1, 1) \in I_\ell$, on devra faire attention aux deux situations qui peuvent se présenter.

— Si $1 \le h_{\lambda_1,1} < h_{H_{\lambda_1,1}}$ alors $t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{\lambda_1,1} \in [\![t_{\lambda_1,1} + 2 - h_{H_{\lambda_1,1}}, t_{\lambda_1,1}]\!]$ et par conséquent $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} = 0$.

— Si $h_{H_{\lambda_1,1}} \leq h_{\lambda_1,1} \leq t_{\lambda_1,1}$ alors $t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{\lambda_1,1} \in [\![1, t_{\lambda_1,1} + 1 - h_{H_{\lambda_1,1}}]\!]$ et par conséquent $\delta_{i,t_{\lambda_1,1}+1-h_{\lambda_1,1}} = 1$.

Soit

$$M = \max_{(\lambda,i)\in I_\ell} \left\{ \max_{1\leq h_{\lambda_1,1}<h_{H_{\lambda_1,1}}} \left\{ \frac{2\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\}, \max_{h_{H_{\lambda_1,1}}\leq h_{\lambda_1,1}\leq t_{\lambda_1,1}} \left\{ \frac{\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) d_i n_i r_i}{1 + \sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\} \right\}.$$

Avant de majorer cet entier M, on modifie un peu les sommes. En effet

$$\sum_{(\lambda,i)\in I_\ell} f(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} e_i,$$

où $e_i = [E_i : \mathbb{Q}]$.

Par conséquent, pour $I \subset \{1, ..., d\}$, on a

$$M = \max_{I} \left\{ \max_{1\leq h_{\lambda_1,1}<h_{H_{\lambda_1,1}}} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\}, \max_{h_{H_{\lambda_1,1}}\leq h_{\lambda_1,1}\leq t_{\lambda_1,1}} \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\} \right\}.$$

On souhaite majorer l'entier M, pour cela on prend les maximums sur deux ensembles différents. On sait que pour tout $i \in I$, on a $r_i \leq 2h_i$. Notons

$$\Delta := \{i \in I, \delta_{i,t_{\lambda,i}+1-h_{\lambda,i}} = 1 \quad \forall h_{\lambda,i} \in [\![1, t_{\lambda,i}]\!] \text{ et } t_{\lambda,i} \leq 2h_i\}.$$

On a alors

$$M \leq \max \left\{ \max_{I} \max_{I\setminus\Delta} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\}, \max_{I} \max_{\Delta} \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\} \right\}.$$

Montrons à présent que

$$\gamma(A) = \max \left\{ \max_{I} \max_{I\setminus\Delta} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\}, \max_{I} \max_{\Delta} \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\} \right\}.$$

Pour cela on introduit deux fonctions ρ_0 et ρ_1 comme dans la preuve du théorème 4.2.2.

Notons $\underline{n} = (n_1, ..., n_d)$, $\underline{g} = (g_1, ..., g_d)$ et $\underline{r} = (r_1, ..., r_d)$, et posons

$$\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i(4h_i + \eta_i - r_i)} \right\},$$

et

$$\rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \right\}.$$

Proposition 4.2.3. *On a l'inégalité suivante :*

$$\max\{\rho_0(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}), \rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r})\} \leq \gamma(A).$$

Preuve. Montrons dans un premier temps que $\rho_1(\underline{n}, \underline{g}, \underline{r}) \leq \gamma(A)$. Ou de façon équivalente que pour tout $I \subset \{1, ..., d\}$, on a

$$\frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}} \leq \gamma(A). \tag{4.45}$$

Notons à présent $\gamma = \gamma(A)$. En effet, montrer l'inégalité (4.45) est équivalent à montrer la suite d'équivalences suivantes. (On remarquera que $4h_i + \eta_i - r_i > 0$ car $r_i \in [\![1, 2h_i]\!]$, $h_i \geq 1$ et $\eta_i = 1\,\text{ou}\,-1$.)

$$\begin{aligned}
(4.45) &\iff \textstyle\sum_I e_i d_i n_i r_i - \gamma - \sum_I \frac{e_i r_i \gamma}{2}(4h_i + \eta_i - r_i) \leq 0 \\
&\iff \tfrac{\gamma}{2}\big(\textstyle\sum_I \frac{2d_i n_i e_i r_i}{\gamma} - 2 - \sum_I e_i r_i(4h_i + \eta_i - ri)\big) \leq 0 \\
&\iff \textstyle\sum_I \big(\frac{2d_i n_i e_i r_i}{\gamma} - e_i r_i(4h_i + \eta_i - ri)\big) - 2 \leq 0 \\
&\iff \textstyle\sum_I \big(e_i r_i^2 + e_i r_i(\frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i)\big) - 2 \leq 0 \\
&\iff \textstyle\sum_I e_i r_i\big(r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i\big) - 2 \leq 0
\end{aligned}$$

Question 4.2.2. Est-ce que $r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i \leq 0$?

En effet

$$\begin{aligned}
r_i + \frac{2d_i n_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i \leq 0 &\iff \frac{2d_i n_i}{\gamma} \leq 4h_i + \eta_i - r_i \\
&\iff \frac{2d_i n_i}{4h_i+\eta_i-r_i} \leq \gamma.
\end{aligned}$$

Par définition de γ, on sait que $\forall i \in I$,

$$\frac{2n_i d_i e_i h_i}{1 + 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i g_i} \leq \gamma,$$

et par conséquent

$$\frac{2d_i n_i}{2h_i + \eta_i + \frac{1}{e_i h_i}} \leq \gamma.$$

Rappelons que l'on souhaite montrer que $\frac{2d_in_i}{4h_i+\eta_i-r_i} \leq \gamma$. Pour cela, il suffit de comparer $2h_i+\eta_i+\frac{1}{e_ih_i}$ à $4h_i+\eta_i-r_i$. Pour cela, on sépare l'étude en deux cas possibles. Supposons que $r_i \leq 2h_i-1$, alors

$$\begin{aligned} r_i \leq 2h_i - 1 \quad &\Rightarrow 4h_i+\eta_i-r_i \geq 4h_i+\eta_i-2h_i+1, \\ &\Rightarrow 4h_i+\eta_i-r_i \geq 2h_i+\eta_i+1, \\ &\Rightarrow 4h_i+\eta_i-r_i \geq 2h_i+\eta_i+\tfrac{1}{e_ih_i}. \end{aligned}$$

Supposons à présent que $r_i = 2h_i$. On remarque que l'on ne peut pas utiliser le même raisonnement qu'auparavant car $2h_i+\eta_i+\frac{1}{e_ih_i} \geq 4h_i+\eta_i-r_i = 2h_i+\eta_i$. Ainsi pour montrer que $\frac{2d_in_i}{4h_i+\eta_i-r_i} \leq \gamma$, on revient à la définition de γ. Soit $I' = \{i \in I, r_i = 2h_i\}$, on sait que

$$(4.45) \iff \sum_I e_ir_i\big(r_i + \frac{2d_in_i}{\gamma} - 4h_i + \eta_i\big) - 2 \leq 0$$

On sait que le terme de gauche de l'inégalité est négatif et peut être majoré comme suit :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_I e_ir_i\big(r_i+\frac{2d_in_i}{\gamma}-4h_i+\eta_i\big)-2 \quad &\leq \textstyle\sum_{I'} e_ir_i\big(r_i+\frac{2d_in_i}{\gamma}-4h_i+\eta_i\big)-2 \\ &= \textstyle\sum_{I'}\frac{4h_id_in_ie_i}{\gamma} - \sum_{I'}(4h_i^2e_i - 2\eta_ih_ie_i) - 2. \end{aligned}$$

On déduit alors que le terme de droite est négatif si et seulement si

$$\frac{\sum_{I'} 2h_id_in_ie_i}{1+\sum_{I'}(2h_i^2e_i - \eta_ih_ie_i)} \leq \gamma.$$

Étant donné la définition de $\gamma = \gamma(A) := \max_I \left\{\frac{2\sum_I n_id_ie_ih_i}{1+\sum_I 2e_ih_i^2+\eta_ie_ih_i}\right\}$ on remarque qu'en effet la dernière inégalité est vérifiée.

La réponse à la question 4.2.2 est que pour tout $i \in [\![1,...,d]\!]$ et pour tout $r_i \leq 2h_i$ $r_i + \frac{2d_in_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i \leq 0$.

Grâce à cette réponse, on obtient l'inégalité suivante, qui comme énoncé précédemment, est équivalente à montrer l'inégalité (4.45).

$$\sum_I e_ir_i\big(r_i + \frac{2d_in_i}{\gamma} - 4h_i - \eta_i\big) - 2 \leq 0.$$

On conclut alors que

$$\rho_1(\underline{n},\underline{g},\underline{r}) = \max_I \left\{\frac{\sum_I e_id_in_ir_i}{1+\sum_I e_i\frac{r_i(4h_i+\eta_i-r_i)}{2}}\right\} \leq \gamma.$$

Un calcul semblable nous permet de montrer que

$$\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\} \leq \gamma.$$

On va le détailler à présent. Montrer l'inégalité précédente revient à montrer que pour tout $I \subset \{1, ..., d\}$, on a

$$\frac{\sum_I 2e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \leq \gamma. \tag{4.46}$$

L'inégalité (4.46) est équivalente à

$$\sum_I e_i r_i (2d_i n_i - \gamma(4h_i + \eta_i - r_i)) \leq 0.$$

Étant donné que $r_i > 0$ pour tout i, il suffit de montrer que $2d_i n_i - \gamma(4h_i + \eta_i - r_i) \leq 0$, ou de façon équivalente que

$$\frac{2d_i n_i}{4h_i + \eta_i - r_i} \leq \gamma.$$

Or, d'après la question 4.2.2, on sait que cette inégalité est bien vérifiée. On conclut alors que

$$\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}) = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\} \leq \gamma.$$

Par conséquent

$$\max\{\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}), \rho_1(\underline{n},\underline{g},\underline{r})\} \leq \gamma(A).$$

$\square$

Montrons que

$$\max\{\rho_0(\underline{n},\underline{g},\underline{r}), \rho_1(\underline{n},\underline{g},\underline{r})\} = \max_I \left\{ \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_I 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i} \right\} = \gamma(A).$$

Ou de façon équivalente montrons que

$$\max\left\{ \max_I \max_{I\setminus\Delta} \left\{ \frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i (4h_i + \eta_i - r_i)} \right\}, \max_I \max_\Delta \left\{ \frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i + \eta_i - r_i)}{2}} \right\} \right\}$$
$$= \max_I \left\{ \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_I 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i} \right\}.$$

Pour cela, on remarque que le maximum est atteint pour $r_i = 2h_i$. De plus, on remarque que pour tout $r_i \leq 2h_i$ on a

$$\frac{\sum_I e_i d_i n_i r_i}{1 + \sum_I e_i \frac{r_i(4h_i + \eta_i - r_i)}{2}} \leq \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_I 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i}.$$

Il nous reste dons à montrer que pour tout $i \in I$ on a

$$\frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i(4h_i + \eta_i - r_i)} \leq \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_I 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i}.$$

Comme dans la preuve du théorème 4.2.2, une étude de fonction nous permet de montrer que

$$\frac{2\sum_I e_i d_i n_i r_i}{\sum_I e_i r_i(4h_i + \eta_i - r_i)} \leq \frac{2\sum_I e_i d_i n_i h_i}{\sum_I e_i h_i(4h_i + \eta_i - h_i)},$$

montrons donc que

$$\frac{2\sum_I e_i d_i n_i h_i}{\sum_I e_i h_i(3h_i + \eta_i)} \leq \frac{2\sum_I n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_I 2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i},$$

ce qui est équivalent à montrer

$$1 + \sum_I (2e_i h_i^2 + \eta_i e_i h_i) - \sum_I e_i h_i(3h_i + \eta_i) \leq 0,$$

ou bien

$$1 - \sum_I e_i h_i^2 \leq 0$$

Cette inégalité est vérifiée car $e_i h_i^2 \geq 1$.

Remarque. Les seuls cas où $e_i h_i^2 = 1$ correspondent aux cas où $e_i = 1$ et $h_i = 1$. Ainsi le seul cas possible est lorsque chaque A_i est de type II. C'est le cas d'une courbe elliptique sans multiplication complexe, ou bien une surface abélienne telle que son groupe de Mumford-Tate soit GL_2.

□

4.3 Conséquences des résultats précédents

Grâce aux deux sections précédentes et le [HiRa16, Paragraphe 9], on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, géométriquement simple de type III, de dimension relative h et pleinement de type Lefschetz. Il existe une constante $c_1 := c_1(A, K) > 0$ telle que pour tout point de torsion P d'ordre m dans $A(\bar{K})$, on a la minoration suivante :*

$$[K(P) : K] \geq c_1^{\omega(m)} m^{2h}. \tag{4.47}$$

Preuve. Soit P un point de torsion d'ordre m. Notons H_P le $\mathrm{End}(A)$-module engendré par P, on a $K(P) = K(H_P)$. La preuve est essentiellement la même que celle donnée au

[HiRa16, Paragraphe 9]. Un des points cruciaux de la preuve est le fait que les représentations ℓ-adiques sont indépendantes sur une extension bien choisie (voir [Ser13]). Soit P un point de torsion d'ordre m, on a alors $m = \prod_{i=1}^{r} \ell_i^{n_i}$. Étant donné que les représentations ℓ-adiques sont indépendantes on obtient l'inégalité suivante, à des constantes multiplicatives près, uniformément en m et en P :

$$[K(P):K] = [K(P_1, ..., P_r):K] \gg \prod_{i=1}^{r} [K(P_i):K],$$

où chaque point P_i est d'ordre $\ell_i^{n_i}$.

En plus on a l'inégalité suivante, à des constantes multiplicatives près, uniformément en ℓ_i et en P_i :

$$[K(P_i):K] \gg \ell_i^{2hn_i}.$$

Posons $\omega(m)$ le nombre de facteurs premiers, alors il existe une constante $c_1 := c_1(A, K)$ positive telle que

$$[K(P):K] = [K(P_1, ..., P_r):K] \gg \prod_{i=1}^{r} [K(P_i):K] \gg \prod_{i=1}^{r} \ell_i^{2hn_i} \geq c_1^{\omega(m)} m^{2h}.$$

□

Remarque. Ce théorème découle de la stratégie de la preuve des théorèmes présentés dans ce chapitre.

En rappelant l'inégalité suivante :

$$\omega(m) \leq c \cdot \frac{\log m}{\log \log m},$$

on peut réécrire l'inégalité (4.47) suivante où c_2 est une constante :

$$[K(P):K] \geq c_1 m^{2h - \frac{c_2}{\log \log m}}. \tag{4.48}$$

Remarque. Dans le cas où A est isogène à un produit de variétés simples de type I, II ou III pleinement de type Lefschetz $A \cong \prod_{i=1}^{d} A_i^{n_i}$ on peut sans aucun problème généraliser ce dernier théorème. En effet, il existe une constante $c_1 := c_1(A, K)$ positive telle que

$$[K(P):K] \geq c_1^{\omega(m)} m^{2h},$$

avec $h = \min_i h_i$.

Chapitre 5

Catalogue de variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz

L'objectif de ce chapitre est de donner un catalogue des variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz. Notamment ces variétés abéliennes vérifient la conjecture de Mumford-Tate et possèdent un certain groupe de Hodge donné.

Dans ce sens là, un des premiers résultats que l'on connait est dû à Noot. On énoncera deux nouveaux résultats concernant la conjecture de Mumford-Tate : le premier est dans la direction des résultats obtenus par Banaszak, Gajda et Krasoń [BGK10], le deuxième est en fait un corollaire des travaux de Pink [Pin98].

Le but de cette section sera d'étendre le [HiRa16, Corollaire 1.8] dans le cas d'une variété abélienne simple de type I ou II selon la classification d'Albert au cas des variétés abéliennes simples de type III. Un résultat analogue à ce dernier est vérifié dans le cas des variétés abéliennes isogènes à un produit de variétés abéliennes de type I et II, voir [HiRa16, Corollaire 1.15], on pourra donc également énoncer un résultat analogue avec le produit des variétés abéliennes de type I, II et III. Avant d'énoncer ce résultat on rappelle la définition de l'ensemble suivant introduit par Pink où l'entier k est impair :

$$\Sigma := \left\{g \geq 1; \exists k \geq 3, \exists a \geq 1, g = 2^{k-1}a^k\right\} \bigcup \left\{g \geq 1; \exists k \geq 3, 2g = \binom{2k}{k}\right\}. \tag{5.1}$$

L'énoncé suivant a été donné dans la section 1.4.3

Théorème 5.0.2 (Hindry et Ratazzi '16). *Soit A une variété abélienne simple de type I ou II telle que le centre de* $\mathrm{End}^\circ(A)$ *soit un corps totalement réel de degré e. On suppose que l'une des trois hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *La dimension relative h de A est un entier impair ou égal à 2,*
2. *On a $e = 1$ et $h \notin \Sigma$,*

3. *La variété abélienne A est de type I (resp. II) et possède une place de mauvaise réduction semi-stable avec dimension torique e (resp. $2e$).*

On a alors que la variété abélienne est pleinement de type Lefschetz, en particulier A vérifie la conjecture de Mumford-Tate

En particulier, le premier point du corollaire précédent est dû à Banaszak, Gajda et Krasoń (voir [BGK06]) lorsque la dimension relative de la variété est impaire, et à Lombardo dans le cas où cette dimension vaut 2 (voir [Lom16, Remark 2.25]). Pour plus de détails, nous renvoyons à la preuve du [HiRa16, Théorème 3.7]. Le deuxième point est un corollaire de la [Pin98, Proposition 4.7].

5.1 Théorème d'existence d'après Noot

D'après le [Noo95, Théorème 1.7] (ou bien dans [Ser03a]), on sait qu'il existe des variétés abéliennes qui ont un groupe de Mumford-Tate donné et qui vérifient la conjecture de Mumford-Tate. Ce dernier théorème affirme que pour toute variété abélienne complexe A telle que $G = \mathrm{MT(A)}$, il existe un corps de nombres K et une variété abélienne A' définie sur K telle que $\mathrm{MT(A')} = \mathrm{G}$ et la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour A'. Grâce au [BiLa04, Theorem 9.1], on sait qu'il existe des variétés abéliennes pleinement de type Lefschetz de type III si et seulement si la dimension relative de la variété est supérieure ou égale à 3.

Énonçons plus précisément ce résultat.

Théorème 5.1.1 (Noot, Shimura)**.** *Soit h un entier, E une extension finie de $\mathbb{Q}$ et D une algèbre de quaternions totalement définie sur E. On a les résultats suivants :*

1. *Il existe une famille universelle de variétés abéliennes contenant D dans son algèbre d'endomorphismes. En particulier, si A est un point général alors* $\mathrm{End}^\circ(A) = D$ *et* $\mathrm{MT(A)} = \mathcal{L}(A)$ *(le groupe de Lefschetz de A). Sauf lorsque* $h = \dim_{\mathrm{rel}}(A) = 1, 2$ *dans le cas où A est de type III.*
2. *De plus il existe un corps de nombres K et une variété abélienne A, définie sur K, telle que* $\mathrm{End}^\circ(A) = D$, $\mathrm{MT(A)} = \mathcal{L}(A)$ *et A vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

Le premier point du théorème précédent est dû à Shimura (voir [BiLa04, Theorem 9.1]) et le deuxième point est le [Noo95, Théorème 1.7].

5.2 Conditions sur la dimension relative

5.2.1 Variétés abéliennes simples de type III

Banaszak, Gajda et Krasoń ont prouvé un résultat analogue au point 1 du [HiRa16, Corollaire 1.15] (voir théorème 5.0.2) dans le cas des variétés abéliennes simples de type

III avec dimension relative impaire (voir [BGK10, Theorem 5.11]). Comme souligné par Lombardo [Lom15a, Remark 6.2.27], ils ont oublié de traiter un cas en particulier que l'on va expliquer maintenant. On donnera une reformulation moins générale du [BGK10, Theorem 5.11].

Théorème 5.2.1. *Soit A une variété abélienne simple de dimension g et de type III selon la classification d'Albert. On suppose que*

1. *la dimension relative $h \in \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ avec $g = 2eh$ et $e = [E : \mathbb{Q}]$ où E et le centre de l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}^{\circ}(A) = \mathrm{End}_{\bar{K}}(A) \otimes \mathbb{Q}$.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz.

Remarque. La preuve du théorème précédent reste quasiment identique à la preuve de [BGK10, Theorem 5.11]. Cependant, il est important de souligner que la nécessité de supposer $h \notin \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ n'a pas été pris en considération dans le [BGK10, Lemma 4.13].

On garde les notations du [BGK10, Paragraphe 4]. Soit $\lambda | \ell$ un place au dessus de ℓ, considérons la représentation λ-adique suivante :

$$\rho_{\lambda}^{\circ} : G_K \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}_{\lambda}).$$

Notons G_{λ} la clôture de Zariski de $\rho_{\lambda}^{\circ}(G_K)$ et $\mathfrak{g}_{\lambda}$ l'algèbre de Lie de G_{λ}. Soit $\phi_{\lambda\infty}^{\circ}$ l'accouplement λ-adique défini sur V_{λ} (voir section 1.2.1). Sous ces notations, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. *([BGK10, Lemma 4.13]) On a l'égalité suivante :*

$$\mathfrak{g}_{\lambda}^{ss} = \mathfrak{so}_{\mathrm{V}_{\lambda}, \phi_{\lambda\infty}^{\circ}}.$$

La preuve est la même que celle page 175-176 de [BGK10]. Rappelons à présent les notations : soit $\overline{\mathrm{V}_{\lambda}} := \mathrm{V}_{\lambda} \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$, on a la décomposition suivante :

$$\overline{\mathrm{V}_{\lambda}} = E(\omega_1) \otimes \ldots \otimes E(\omega_t), \tag{5.2}$$

où pour tout $i \in [\![1, t]\!]$ $E(\omega_i)$ est un module irréductible d'algèbre de Lie de poids maximal ω_i.

L'avant dernière phrase de la preuve du lemme 5.2.1 affirme que, étant donné que la dimension relative est impaire, l'étude de la table des poids minuscules (voir table 5.1 ou bien [Bou06, Table 1 et 2, P. 213–214]) et des dimensions des représentations associées montre que le produit tensoriel (5.2) ne peut contenir qu'un seul facteur orthogonal. On a ainsi deux possibilités :

1. Soit de type D_n, poids minuscule w_1 et dimension $2n$.

Système de racine	Poids minuscules	Dimension	Propriétés de dualité
$A_\ell\,(\ell \geq 1)$	$\omega_r,\ 1 \leq r \leq \ell$	$\binom{\ell+1}{r}$	$(-1)^r$, si $r = \frac{\ell+1}{2}$ 0 sinon
$B_\ell\,(\ell \geq 2)$	ω_ℓ	2^ℓ	$+1$, si $\ell \equiv 3, 0 \mod 4$ -1, si $\ell \equiv 1, 2 \mod 4$
$C_\ell\,(\ell \geq 2)$	ω_1	2ℓ	-1
$D_\ell\,(\ell \geq 3)$	ω_1	2ℓ	$+1$
	$\omega_{\ell-1},\ \omega_\ell$	$2^{\ell-1}$	$+1$, si $\ell \equiv 0 \mod 4$ -1, si $\ell \equiv 2 \mod 4$ 0, si $\ell \equiv 1 \mod 2$

FIGURE 5.1 – Poids minuscules pour les algèbres de Lie classiques

2. Soit de type A_{4k+3}, poids minuscule w_{2k+2} et dimension $\binom{4k+4}{2k+2}$.

Ainsi, il semblerait que le dernier point a été ignoré dans [BGK10] dans la définition des variétés abéliennes de classe $\mathcal{B}$. Expliquons à présent ce dernier point.

En effet, la représentation A_{4k+3} est orthogonale car $r = 2k+2$ est un nombre pair, par conséquent $(-1)^r = 1$. Ainsi d'après les propriétés de auto-dualité $(+1)$ la représentation est bien une représentation orthogonale. On sait également que $\binom{4k+4}{2k+2} = 2h$, ainsi la question qui se pose est la suivante :

Question 5.2.1. *Pour quelles valeurs de k l'entier $\frac{1}{2}\binom{4k+4}{2k+2}$ est impair ?*

Lemme 5.2.2. *L'entier $\frac{1}{2}\binom{4k+4}{2k+2}$ est impair si et seulement si $k+1 = 2^m$ pour un entier $m \geq 1$.*

Preuve. Étudions en particulier la parité de l'entier $\binom{4k+4}{2k+2}$ et plus particulièrement sa valuation $2-$*adique*. On a $r = 2k+2 = 2(k+1)$ et on remarque dans un premier temps l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\binom{4k+4}{2k+2} &= \frac{(4k+4)!}{((2k+2)!)^2} = \frac{1}{(2k+2)!} \times \frac{(4k+4)!}{(2k+2)!} \\ &= \frac{1}{(2k+2)!} \times 2^{2k+2} \times (1 \times 3 \times ... \times (4k+3)) \\ &= \frac{2^{2k+2} \times (1 \times 3 \times ... \times (2k+1) \times (2k+3) \times ... \times (4k+3))}{1 \times 2 \times ... \times (2k+1) \times (2k+2)} \\ &= \frac{2^{2k+2}}{2^{k+1} \times (1 \times 2 \times ... \times (k+1))} \times ((2k+3) \times ... \times (4k+3)) \\ &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \times (\text{nombre impair})\end{aligned} \tag{5.3}$$

L'égalité précédente nous montre que la valuation 2-adique de $\binom{4k+4}{2k+2}$ est liée à la valuation 2-adique de $(k+1)!$.

Considérons à présent le développement binaire de $k+1$:

$$k+1=\sum_{i=0}^{m}\epsilon_i 2^i,$$

avec $m \geq 1$ et $\epsilon_m = 1$.

On sait que

$$v_2((k+1)!)=\sum_{h\geq 1}\lfloor\frac{k+1}{2^h}\rfloor.$$

D'après l'égalité (5.3), on sait que

$$v_2(\binom{4k+4}{2k+2}) = k+1-v_2((k+1)!) = \epsilon_0+...+\epsilon_m = \epsilon_0+...+\epsilon_{m-1}+1.$$

On déduit alors que

$$\frac{1}{2}\binom{4k+4}{2k+2}\text{est impair} \iff \epsilon_0=...=\epsilon_{m-1}=0 \iff k+1=2^m \iff k=2^m-1$$

□

5.2.2 Variétés abéliennes simples de type III avec $E=\mathbb{Q}$

L'objectif de cette section est d'étendre les résultats de Pink. Concernant la conjecture de Mumford-Tate, Pink a appliqué ses résultats au cas $\mathrm{End}(A)=\mathbb{Z}$, mais comme remarqué par Pink ([Pin98, Remarque p. 33]) ces résultats peuvent être généralisés. C'est ce que l'on développera dans cette section pour des variétés abéliennes simples de type III.. En particulier on énoncera un analogue de la [Pin98, Proposition 4.7] dans le cas des représentations absolument irréductibles orthogonales.

Soit A une variété abélienne simple de type III définie sur un corps de nombres K telle que $\dim A = g$. Grâce au [BGK10, Theorem 3.23], on sait que la représentation associée à l'espace vectoriel $\mathrm{V}_\lambda := \mathrm{T}_\lambda \otimes E_\lambda$ est absolument irréductible et que $\mathrm{V}_\ell = \bigoplus_{\lambda|\ell}\mathrm{V}_\lambda \oplus \mathrm{V}_\lambda$. Comme dans la section précédente, on considère la représentations λ-adique ρ_λ°, le groupe algébrique G_λ et son algèbre de lie associée $\mathfrak{g}_\lambda$.

Afin d'énoncer un analogue de la [Pin98, Proposition 4.7], on doit définir les couples de Mumford-Tate (voir [Pin98, Definition 4.1]). Soit G un groupe algébrique réductif (par exemple le groupe de Mumford-Tate de A) et ρ une représentation de dimension finie fidèle de G.

Définition 5.2.1. *On dira que le couple (G,ρ) est un couple de Mumford-Tate faible de poids $\{0,1\}$, si et seulement si ils existent des cocaractères $\mu_i : \mathbb{G}_{m,\bar{K}} \to G_{\bar{K}}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ tels que*

— *$G_{\bar{K}}$ est engendré par l'image de tous les conjugués sous $G(\bar{K})$ de tous les μ_i, et*
— *les poids de chaque $\rho \circ \mu_i$ est dans $\{0,1\}$.*

On dira que le couple (G,ρ) est un couple de Mumford-Tate fort de poids $\{0,1\}$, si et seulement si il est un couple de Mumford-Tate faible et les cocaractères sont conjugués sous le groupe de Galois absolu $Gal(\bar{K}/K)$.

On se place à présent dans le cas où la variété abélienne est simple de type III et telle que le centre de son algèbre d'endomorphismes $E = Z(\mathrm{End}^\circ(A))$ soit égal à $\mathbb{Q}$. Ainsi $[E : \mathbb{Q}] = 1$ et $g = 2eh = 2h$. D'après [Pin98, Fact 5.9] on sait que tous les couples de Mumford-Tate faibles sont en fait des couples de Mumford-Tate forts.

On rappelle que le groupe algébrique réductif $G = \mathbb{G}_{m,\bar{K}} \cdot G^{der}$ où G^{der} est le groupe dérivé de G. La représentation ρ se décompose en le produit tensoriel extérieur suivant :

$$\rho \cong \rho_0 \otimes \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_s,$$

où chaque ρ_i est une représentation absolument irréductible, ρ_0 est la représentation standard associé à $\mathbb{G}_{m,\bar{K}}$ et les ρ_i (pour $1 \leq i \leq s$) sont les représentations associées à chaque facteur G_i.

Proposition 5.2.1. *([Pin98, Proposition 4.4]) Si (G,ρ) un couple de Mumford-Tate fort de poids $\{0,1\}$ sur K tel que la représentation ρ est absolument irréductible, alors G^{der} est semi-simple sur K ou bien trivial. En particulier, tous les facteurs simples du produit tensoriel de (G,ρ) sur $\bar{K}$ ont le même type dans la table 5.1 avec le même entier ℓ.*

On peut extraire de la table 5.1 la table correspondante aux représentations orthogonales.

Système de racine	Poids minuscules	Dimension	Propriétés de dualité
$A_\ell\,(\ell \geq 1)$	ω_r, $1 \leq r \leq \ell$	$\binom{\ell+1}{r}$	$+1$ avec $r = \frac{\ell+1}{2} \equiv 0 \mod 2$
$B_\ell\,(\ell \geq 2)$	ω_ℓ	2^ℓ	$+1$, si $\ell \equiv 3,0 \mod 4$
$D_\ell\,(\ell \geq 3)$	ω_1	2ℓ	$+1$
	$\omega_{\ell-1}$, ω_ℓ	$2^{\ell-1}$	$+1$, si $\ell \equiv 0 \mod 4$

FIGURE 5.2 – Poids minuscules pour les algèbres de Lie orthogonales

On rappelle que l'on note s le nombre de facteurs simples de $\rho_{|G^{der}}$. La proposition suivante est analogue à [Pin98, Proposition 4.5] :

Proposition 5.2.2. *Si (G,ρ) un couple de Mumford-Tate fort de poids $\{0,1\}$ sur K tel que la représentation $\rho_{|G^{der}}$ est absolument irréductible et orthogonale, alors tous les facteurs simples du produit tensoriel de (G,ρ) sur $\bar{K}$ sont soit*
— *orthogonaux et en nombre quelconque ($s \geq 1$) ;*
— *soit symplectiques et en nombre pair ($s = 2k$ pour $k \geq 1$).*

Preuve. Étant donné que $\rho_{|G^{der}}$ est absolument irréductible et orthogonale et que, d'après la proposition 5.2.1, tous les facteurs simples du produit tensoriel de (G, ρ) sur $\bar{K}$ ont le même type, on sait que deux cas peuvent se produire : soit, tous les facteurs simples sont orthogonaux en nombre s, soit tous les facteurs simples sont symplectiques en nombre pair. En effet, un produit tensoriel de deux représentations symplectiques est orthogonale.

□

On peut à présent donner une proposition analogue à la [Pin98, Proposition 4.7] :

Proposition 5.2.3. *Soit (G, ρ) un couple de Mumford-Tate fort de poids $\{0, 1\}$ sur K tel que la représentation $\rho_{|G^{der}}$ est absolument irréductible et orthogonale. Supposons que $n := \dim \rho$ est supérieur à 1 et n'est aucune des valeurs suivantes :*

— *une puissance de* 2 ;

— $(2a)^k$ *avec k un entier pair $k \geq 2$ et $a \geq 2$;*

— *une puissance de $\binom{2k}{k}$ où k est un entier pair $k \geq 2$;*

— *une puissance paire de $\binom{2k}{k}$ où k est un entier impair $k \geq 1$.*

Alors $G = \mathbb{G}_m \cdot SO_{n,\mathbb{Q}}$.

Remarque. La preuve fournit un ensemble plus mince que celui énoncé dans la proposition. Ainsi, un énoncé plus fin peut être extrait de ce dernier.

Preuve. Soit $T_\ell \in \{A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell\}$ un des quatre types simples de la table 5.1. L'objectif de la preuve sera d'exclure les valeurs de h pour lesquels la représentation n'est pas orthogonale. Pour cela on étudiera en détail toutes les combinaisons qui peuvent arriver. Soit $n = 2h = \dim \rho$.

Le premier cas à considérer est celui où la représentation associée au type T_ℓ est orthogonale. Voici donc une table plus détaillée que la table 5.2 :

Système de racine	Poids minuscules	Dimension	Propriétés de dualité
$A_{4k+3}\,(k \geq 0)$	$\omega_1, \ldots, \omega_{4k+3}$	$\binom{4k+4}{2k+2}$	$+1$
$B_{4k}\,(k \geq 1)$	ω_{4k}	2^{4k}	$+1$
$B_{4k+3}\,(k \geq 0)$	ω_{4k+3}	2^{4k+3}	$+1$
$D_k\,(k \geq 3)$	ω_1	$2k$	$+1$
$D_{4k}\,(k \geq 1)$	$\omega_{4k-1}, \omega_{4k}$	2^{4k-1}	$+1$

FIGURE 5.3 – Poids minuscules orthogonales

Bien évidemment, nous on souhaite obtenir le D_k associé à la représentation orthogonale standard. Ainsi, on doit éliminer les quatre cas restants :

— D_{4k} : de dimension $2^{(4k-1)s}$ où $k \geq 1$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{(4k-1)s-1}$ pour tout $k \geq 1$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— B_{4k+3} de dimension $2^{(4k+3)s}$ où $k \geq 0$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{(4k+3)s-1}$ pour tout $k \geq 0$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— B_{4k+3} de dimension $2^{(4k)s}$ où $k \geq 1$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{4ks-1}$ pour tout $k \geq 1$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— A_{4k+3} de dimension $(\binom{4k+4}{2k+2})^s$ où $k \geq 0$ et $s \geq 1$. Si $h \neq \frac{1}{2}(\binom{4k+4}{2k+2})^s$ pour tout $k \geq 0$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

On remarque que les deux premiers cas donnent la même condition sur l'entier h. On peut alors déterminer l'ensemble suivant :

$$\Sigma_1 = \{2^{(4k+3)s-1},\, k \geq 0,\, s \geq 1\} \bigcup \{2^{4ks-1},\, k \geq 1,\, s \geq 1\} \bigcup \{\frac{1}{2}(\binom{4k+4}{2k+2})^s,\, k \geq 0,\, s \geq 1\}. \tag{5.4}$$

Le deuxième cas à considérer est celui où la représentation associée au type T_ℓ est symplectique en nombre pair. Considérons à présent la table correspondante aux représentations symplectiques (voir table 5.4) :

Système de racine	Poids minuscules	Dimension	Propriétés de dualité
A_{4k+1} $(k \geq 0)$	$\omega_1, \ldots, \omega_{4k+1}$	$\binom{4k+2}{2k+1}$	-1
B_{4k+1} $(k \geq 1)$	ω_{4k+1}	2^{4k+1}	-1
B_{4k+2} $(k \geq 0)$	ω_{4k+2}	2^{4k+2}	-1
C_k $(k \geq 2)$	ω_1	$2k$	-1
D_{4k+2} $(k \geq 1)$	$\omega_{4k+1}, \omega_{4k+2}$	2^{4k+1}	-1

FIGURE 5.4 – Poids minuscules symplectiques

— D_{4k+2} : de dimension $2^{(4k+1)2s}$ où $k \geq 1$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{2s(4k+1)-1}$ pour tout $k \geq 1$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— C_k : de dimension $(2k)^{2s}$ où $k \geq 2$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{2s-1}k^{2s}$ pour tout $k \geq 2$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— B_{4k+2} de dimension $2^{(4k+2)2s} = 2^{4s(2k+1)}$ où $k \geq 0$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{4s\alpha-1}$ pour tout $\alpha \geq 1$ impair et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— B_{4k+1} de dimension $2^{(4k+1)2s}$ où $k \geq 1$ et $s \geq 1$. Si $h \neq 2^{2s(4k+1)-1}$ pour tout $k \geq 1$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

— A_{4k+1} de dimension $(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s}$ où $k \geq 0$ et $s \geq 1$. Si $h \neq \frac{1}{2}(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s}$ pour tout $k \geq 0$ et $s \geq 1$, ce cas peut-être exclu.

On remarque que le premier et le quatrième cas donnent la même condition sur l'entier h. On détermine alors l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = &\{2^{2s(4k+1)-1},\, k \geq 1,\, s \geq 1\} \bigcup \{2^{4\alpha s-1},\, \alpha \text{ impair},\, s \geq 1\} \\ &\bigcup \{2^{2s-1}k^{2s},\, k \geq 2,\, s \geq 1\} \bigcup \{\frac{1}{2}(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s},\, k \geq 0,\, s \geq 1\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

On conclut alors que si $h \notin \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ la représentation $\rho_{|G^{der}}$ est absolument irréductible, orthogonale et correspond à la représentation standard.

□

Considérons l'ensemble suivant :

$$\Sigma' := \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2. \tag{5.6}$$

Ainsi, lorsque l'on enlève quelques répétitions on obtient :

$$\begin{aligned}\Sigma' :=&\{2^{(4k+3)s-1},\ k\geq 0,\ s\geq 1\}\bigcup\{2^{4ks-1},\ k\geq 1,\ s\geq 1\}\\ &\bigcup\{\frac{1}{2}(\binom{4k+4}{2k+2})^s,\ k\geq 0,\ s\geq 1\}\bigcup\{2^{2s(4k+1)-1},\ k\geq 1,\ s\geq 1\}\\ &\bigcup\{2^{2s-1}k^{2s},\ k\geq 2,\ s\geq 1\}\bigcup\{\frac{1}{2}(\binom{4k+2}{2k+1})^{2s},\ k\geq 0,\ s\geq 1\}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.2.2. *Soit A une variété abélienne simple de type III telle que le centre de* $\mathrm{End}^\circ(A)$ *soit égale à* $\mathbb{Q}$. *Supposons que la dimension relative h n'appartient pas à l'ensemble* Σ'. *Alors la variété abélienne est pleinement de type Lefschetz. En particulier, A vérifie la conjecture de Mumford-Tate.*

Grâce aux deux théorèmes précédents, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 5.2.1. *Soit E un corps de nombres totalement réel de degré $e = [E : \mathbb{Q}]$. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres, telle que A est géométriquement simple de type III et le centre de son algèbre d'endomorphismes est E. On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *La dimension relative h appartient à l'ensemble $\{2k+1, k\in\mathbb{N}\}\setminus\{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m\in\mathbb{N}\}$.*
2. *On a $e = 1$ et la dimension relative h n'appartient pas au sous-ensemble Σ'.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz et en particulier

$$\gamma(A) = \frac{2dhe}{1+e(2h^2-h)} = \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{Hg(A)}+1}.$$

Remarque. Dans le premier cas du corollaire précédent, on est en train d'exclure les entiers h impairs suivant : 3, 35, 6435 (lorsque $h \leq 10^6$). Dans le cas où A est une variété abélienne simple de type III telle que $E = \mathbb{Q}$, le corollaire précédent est en train les 21 valeurs possibles pour $g = 2h \leq 10^3$ suivantes :

$$\Sigma'_{\leq 10^3} = \{4, 6, 8, 16, 36, 64, 70, 100, 128, 144, 196, 216, 256, 324, 400, 484, 512, 576, 676, 784, 900\}.$$

Lorsque $g \leq 10^6$, l'ensemble Σ' est de cardinal 513.

On peut étendre ce résultat au cas d'une variété abélienne géométriquement isogène à un produit de variétés abéliennes de type I, II ou III. Grâce au [HiRa16, Corollaire 1.15], au corollaire précédent et au théorème 4.2.1, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.2. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K isogène sur $\overline{K}$ à $\prod_{i=i}^{d} A_i^{n_i}$. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ on a $n_i \geq 1$ et on note $\dim A_i = g_i$. De plus on suppose que les variétés abéliennes A_i sont simples, de type I, II ou III et non $\overline{K}$-isogènes deux à deux. On suppose de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

1. *Les dimensions relatives h_i est impair ou égale à 2 lorsque la variété abélienne A_i est de type I ou II et $h_i \notin \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{2}\binom{2^{m+2}}{2^{m+1}}, m \in \mathbb{N}\}$ lorsque A_i est de type III.*
2. *On a $e_i = 1$ (i.e. $E_i = \mathbb{Q}$) et h_i n'appartient pas au sous-ensemble Σ lorsque A_i de type I ou II et h_i n'appartient pas au sous-ensemble Σ' lorsque A_i est de type III.*

Alors A est pleinement de type Lefschetz et en particulier avec les notation du théorème 4.2.3 on a :

$$\gamma(A) = \max_{I} \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i d_i e_i h_i}{1 + \sum_{i\in I} e_i(2h_i^2 + \eta_i h_i)} \right\} = \max_{I} \left\{ \frac{2\sum_{i\in I} n_i \dim A_i}{1 + \dim \mathrm{Hg}(\prod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{A_i})} \right\}.$$

Annexe A

Cas des petites valeurs de ℓ

Comme on l'a défini à la définition 3.1.3, il existe un ensemble fini de nombres premiers ℓ tels que l'on ne peut pas utiliser les mêmes arguments qu'auparavant pour déterminer l'invariant $\gamma(A)$. Cependant, en faisant quelques modifications (notamment au module de Tate et à l'accouplement ℓ-adique) on peut sans aucun problème déterminer cet invariant. On illustrera ces modifications dans cette section. Ainsi les constantes qui interviendront ont le droit de dépendre du nombre premier ℓ mais pas de l'entier n dans ℓ^n.

Voici une liste des différents cas à traiter :

1. ℓ est ramifié dans $\mathcal{O}_E$ et $\ell \nmid \deg(\phi)$ et pour les types II et III tels que l'algèbre de quaternions se décompose,
2. $\ell \mid \deg(\phi)$ et pour le type III tels que l'algèbre de quaternions se décompose,
3. pour le type III les ℓ tels que l'algèbre de quaternions **ne** se décompose **pas** et tels que ℓ soit ramifié dans $\mathcal{O}_E$.

Hypothèses de départ Tout au long de cette section la variété abélienne A définie sur le corps de nombres K sera considérée comme étant simple géométriquement, de type III et pleinement de type Lefschetz. On suppose également que $\mathrm{End}_K(A) = \mathrm{End}_{\bar{K}}(A)$, $\mathrm{End}(A)$ est un ordre maximal de $\mathrm{End}^\circ(A)$ et que la polarisation $\phi : A \to A^\vee$ est fixée. Ces hypothèses correspondent aux mêmes hypothèses de départ dans la section 4.1

Soit $\rho_{\lambda^\infty} : G_K \to \mathrm{GL}_{2h}(\mathbb{Z}_\ell)$ la représentation λ-adique, on rappelle, d'après l'équation 3.3, que

$$\mathrm{MT(A)}(\mathbb{Z}_\ell) = \{(m_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GO}_{\mathcal{O}_\lambda}, \mathrm{mult(m_\lambda) = m} \in \mathbb{Z}_\ell^\times\},$$

ainsi on a l'égalité suivante, à indice fini près, dépendant de ℓ

$$\rho_{\lambda^\infty}(G_K) = \{x \in \mathrm{GO}_{\mathrm{2h},\mathcal{O}_\lambda}, \mathrm{mult(x)} \in \mathbb{Z}_\ell^\times\}.$$

A.0.3 Cas où ℓ est ramifié dans $\mathcal{O}_{E_\ell}$

Détaillons à présent la modification concernant le point 1. Remarquons dans un premier temps que lorsque ℓ est non ramifiée on a $\mathcal{O}_{E_\ell} = \mathcal{O}^*_{E_\ell}$ et on peut définir facilement l'accouplement de Weil λ-adique pour toute place λ au dessus de ℓ, voir section 1.2.1. Supposons à présent que ℓ est ramifié dans $\mathcal{O}_E$ ainsi $\ell\mathcal{O}_E = \prod_{\lambda|\ell} \lambda^{e(\lambda)}$. De plus on suppose que $e(\lambda) > 1$ pour tout $\lambda|\ell$. On a

$$\phi^*_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}^*_{E_\ell}(1).$$

On remarque que dans le as où ℓ est ramifié on n'a plus $\mathcal{O}^*_{E_\ell} = \mathcal{O}_{E_\ell}$, cependant on a toujours $\mathcal{O}_{E_\ell} \subset \mathcal{O}^*_{E_\ell}$.

Supposons dans un premier temps que l'image de $\phi^*_{\ell^\infty}$ est dans $\mathcal{O}_{E_\ell}$, on traitera le cas général ultérieurement.

Cas où $\phi^*_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}_{E_\ell}(1)$: Rappelons que dans le cas où A est de type III on a la décomposition suivante :

$$\mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda = \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{T}_\lambda \oplus \mathrm{T}_\lambda.$$

Pour tout entier $n \leq 1$ on obtient par réduction modulo λ^n l'accouplement suivant :

$$\phi_{\lambda^n} : (\mathrm{T}_\lambda/\lambda^n\mathrm{T}_\lambda) \times (\mathrm{T}_\lambda/\lambda^n\mathrm{T}_\lambda) \to \mathcal{O}_\lambda/\lambda(1),$$

or $\ell\mathcal{O}_\lambda = \lambda^{e(\lambda)}$ ainsi

$$\mathrm{A}[\ell^n] = \mathrm{T}_\ell(A)/\ell^n\mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} (\mathrm{T}_\lambda/\lambda^{e(\lambda)n}\mathrm{T}_\lambda) \oplus (\mathrm{T}_\lambda/\lambda^{e(\lambda)n}\mathrm{T}_\lambda)$$

et donc

$$\phi_{\lambda^{e(\lambda)n}} : \mathrm{T}_\lambda[\lambda^{e(\lambda)n}] \times \mathrm{T}_\lambda[\lambda^{e(\lambda)n}] \to \mathcal{O}_\lambda/\lambda^{e(\lambda)n}(1) = \mathcal{O}_\lambda/\ell^n\mathcal{O}_\lambda(1).$$

Faisons une dernière remarque concernant le rang sur $\mathbb{Z}_\ell$ de $\mathcal{O}_\lambda$, en effet $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{O}_\lambda) = e(\lambda)f(\lambda)$ par conséquent :

$$\mathcal{O}_\lambda/\ell^n\mathcal{O}_\lambda \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{e(\lambda)f(\lambda)} \quad \text{et} \quad (\mathcal{O}_\lambda/\ell^n\mathcal{O}_\lambda)^{2h} \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{2he(\lambda)f(\lambda)}$$

Adaptons à présent les méthodes développés dans les section 4.1 et 4.2 dans le cas où ℓ est ramifié et sous l'hypothèse précédente. On rappelle que dans les section 4.1 et 4.2 le sous-groupe $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ était décomposé comme suit : $H = \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda \oplus H_\lambda$ où $H_\lambda \subset \mathrm{T}_\lambda[\lambda^n]$. Dans notre cas on prendra

$$H_\lambda \subset \mathrm{T}_\lambda[\lambda^{e(\lambda)n}].$$

La propriété μ reste encore vraie après modification de la définition de $m_1(H_\lambda)$,

$$m_1(H_\lambda) = \max\{k \in \mathbb{N}, \exists n \geq 0, \exists P, Q \in H_\lambda \text{ d'ordre } \lambda^{e(\lambda)n},\ \phi_{\lambda^{e(\lambda)n}}(P,Q) \text{ soit d'ordre } \lambda^{e(\lambda)k}\}.$$

Ainsi tous les calculs que l'on a fait dans les sections 4.1 et 4.2 restent vrais en remplaçant partout

$$f(\lambda) \leftrightarrow f(\lambda)e(\lambda),$$
$$\sum_{\lambda|\ell} f(\lambda) = [E:\mathbb{Q}] \leftrightarrow \sum_{\lambda|\ell} f(\lambda)e(\lambda) = [E:\mathbb{Q}],$$

et en utilisant l'accouplement suivant :

$$\phi_{\lambda^{e(\lambda)n}} : \mathrm{T}_\lambda[\lambda^{e(\lambda)n}] \times \mathrm{T}_\lambda[\lambda^{e(\lambda)n}] \to \mathcal{O}_\lambda/\lambda^{e(\lambda)n}(1) = \mathcal{O}_\lambda/\ell^n\mathcal{O}_\lambda(1). \tag{A.1}$$

Traitons à présent le cas général.

Cas où $\phi^*_{\ell^\infty} : \mathrm{T}_\ell(A) \times \mathrm{T}_\ell(A) \to \mathcal{O}^*_{E_\ell}(1)$: On rappelle que l'on a les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} D & R \\ E \arrow[u] & O_E \arrow[u] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, "e"'] & \mathbb{Z} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_\ell & R_\ell \\ E_\ell \arrow[u] & \mathcal{O}_{E_\ell} \arrow[u] \\ \mathbb{Q}_\ell \arrow[u, "e"'] & \mathbb{Z}_\ell \arrow[u] \end{tikzcd}$$

De plus on sait que $\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda$ et que E_λ est le complété de E pour la place λ.

Ainsi comme $\mathcal{O}^*_\lambda$ est un idéal fractionnaire de E_λ on sait qu'il existe un entier m_λ tel que

$$\mathcal{O}^*_\lambda = \pi_\lambda^{-m_\lambda}\mathcal{O}_\lambda, \tag{A.2}$$

où π_λ est une uniformisante.

Rappelons que notre but est d'obtenir un accouplement à valeur dans $\mathcal{O}_{E_\ell}$ pour pouvoir utiliser les méthodes développées auparavant.

On pose

$$m_0 := pgcd\{m_\lambda, \lambda|\ell, \ell \text{ ramifié dans } O_E\},$$

ainsi $\ell^{m_0}\mathcal{O}^*_{E_\ell} \subset \mathcal{O}_{E_\ell}$.

En effet, grâce à l'équation (A.2) et à la définition de m_0 on a pour tout λ ramifié l'inclusion

$$\mathcal{O}^*_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}^*_\lambda = \prod_{\lambda|\ell} \pi_\lambda^{-m_\lambda}\mathcal{O}_\lambda \subset \ell^{-m_0} \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda = \ell^{-m_0}\mathcal{O}_{E_\ell}.$$

Posons à présent

$$\mathrm{T}'_\ell = \ell^{m_0}\mathrm{T}_\ell(A), \tag{A.3}$$

ainsi $\phi^*_{\ell^\infty}$ restreint à $\mathrm{T}'_\ell \times \mathrm{T}'_\ell$ est à valeur dans $\mathcal{O}_{E_\ell}$. À la place de considérer $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on pose

$$H' = \ell^{m_0}H \subset \mathrm{T}'_\ell/\ell^n\mathrm{T}'_\ell. \tag{A.4}$$

Grâce aux méthodes développées dans la section 4.1 on obtient l'inégalité suivante uniformément en H

$$|H'| \ll [K(H') : K]^{\gamma(A)} \leq [K(H) : K]^{\gamma(A)}$$

et

$$|H| \leq |H'| + |A[\ell^{m_0}]|.$$

Remarque. En effet, étant donné que l'ensemble des nombres premiers ℓ ramifié est fini, le cardinal de $A[\ell^{m_0}]$ est borné.

On retrouve ainsi l'inégalité voulue pour tout $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

$$|H| \ll [K(H) : K]^{\gamma(A)}.$$

A.0.4 Cas où ℓ divise le degré de la polarisation

On suppose dans cette section que le nombre premier ℓ est tel que l'algèbre de quaternions se décompose et tel que $\ell | \deg(\phi)$. On définit l'entier suivant :

$$m_0 := \max_k\{\ell^k | \deg(\phi)\}. \tag{A.5}$$

On rappelle que lorsque $\ell | \deg(\phi)$ l'accouplement obtenu n'est pas non dégénéré modulo ℓ^n pour tout entier $n \geq 1$.

Notre but est donc d'obtenir un accouplement (bilinéaire antisymétrique) non dégénéré modulo ℓ^n pour tout entier $n \geq 1$. Pour cela on introduit les modifications suivantes. On pose

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}'_\ell := \ell^{m_0}\mathrm{T}_\ell(A) \\ &H' := \ell^{m_0}H \subset \mathrm{T}'_\ell/\ell^n\mathrm{T}'_\ell \quad \forall n \geq 1. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Dans le but d'obtenir un accouplement non dégénéré modulo ℓ^n on introduit le nouvel accouplement défini comme suit :

$$\begin{aligned} \phi'_{\ell^\infty} : \mathrm{T}'_\ell \times \mathrm{T}'_\ell &\to \mathbb{Z}_\ell(1) \\ (x, y) &\mapsto \phi_{\ell^\infty}(x, \phi(y)). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Grâce aux méthodes développées dans la section 4.1 on obtient l'inégalité suivante uniformément en H

$$|H'| \ll [K(H'):K]^{\gamma(A)} \leq [K(H):K]^{\gamma(A)}$$

et

$$|H| \leq |H'| + |A[\ell^{m_0}]|.$$

Remarque. En effet, étant donné que l'ensemble des nombres premiers ℓ tels que l'algèbre de quaternions se décompose et tels que $\ell|\deg(\phi)$ est fini, le cardinal de $A[\ell^{m_0}]$ est borné.

On retrouve ainsi l'inégalité voulu pour tout $H \subset \mathrm{A}[\ell^\infty]$

$$|H| \ll [K(H):K]^{\gamma(A)}.$$

A.0.5 Cas où ℓ est tel que l'algèbre de quaternions ne se décompose pas

On se place dans le cas où le nombre premier ℓ est ramifié et tel que l'algèbre de quaternions D ne se décompose pas. Cependant on peut obtenir une décomposition après tensorisation par une extension quadratique (voir proposition 3.1.1 ou [HiRa16, Proposition 3.5]). On expliquera cela plus en détail. On rappelle que A est une variété abélienne simple de type III dans la classification d'Albert.

Soit $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on sait que H se décompose de la façon suivante :

$$H = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{H}_\lambda. \tag{A.8}$$

Étant donné que $\mathcal{O}_{E_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda$ on a $\mathrm{T}_\ell(A) = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_\lambda$ ainsi

$$\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{T}_\lambda / \ell^n \mathcal{T}_\lambda.$$

Remarque. On rappelle que lorsque $\ell \notin \mathcal{S}$ on a $\mathcal{H}_\lambda = H_\lambda \oplus H_\lambda$. En effet, lorsque ℓ n'est pas ramifié on a $D_\ell = \mathrm{End}^\circ(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{\lambda|\ell} Mat_{2\times 2}(E_\lambda)$.

Notre but à présent est d'obtenir une décomposition pour $\mathcal{T}_\lambda$ lorsque $\ell \in \mathcal{S}$, pour cela on doit tensoriser par une extension quadratique de E, soit F cette extension. En effet, on sait que l'algèbre de quaternions D est toujours déployée sur une extension quadratique de E, voir diagramme A.1.

On obtient alors

$$D_\ell \otimes F_\ell = \prod_{\lambda|\ell} Mat_{2\times 2}(F_\lambda). \tag{A.9}$$

Ainsi lorsque l'on se place dans cette extension F on a le diagramme A.2

$$\begin{tikzcd}
D\otimes F \simeq Mat_{2\times 2}(F) & D_\ell \otimes F_\ell & F_\lambda := E_\lambda \otimes_E F \\
F \arrow[u] & F_\ell \arrow[u] & E_\lambda \arrow[u] \\
E \arrow[u, "2"'] & E_\ell \arrow[u] & \mathbb{Q}_\lambda \arrow[u] \\
\mathbb{Q} \arrow[u, "e"'] & \mathbb{Q}_\ell \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.1 – Extension quadratique F

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_\ell(A) & \mathrm{T}_{\ell,F}(A) \\
\mathcal{O}_{E_\ell} \arrow[u] & \mathcal{O}_{F_\ell} \arrow[u] \\
\mathbb{Z}_\ell \arrow[u] & \mathbb{Z}_\ell \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.2 – Module de Tate

Sur cette extension on a la décomposition suivante :

$$\mathrm{T}_{\ell,F}(A) := \mathrm{T}_\ell(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_\ell}} \mathcal{O}_{F_\ell} = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{T}_{\lambda,F} \quad \text{où} \quad \mathcal{T}_{\lambda,F} = \mathrm{T}_{\lambda,F} \oplus \mathrm{T}_{\lambda,F}. \tag{A.10}$$

Ainsi pour tout sous-espace $H \subset \mathrm{A}[\ell^n]$ on a

$$H = \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{H}_\lambda \quad \text{où } \mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{T}_{\lambda,F}/\ell^n \mathcal{T}_{\lambda,F}. \tag{A.11}$$

Le sous-espace $\mathcal{H}_\lambda$ se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_\lambda = H_\lambda \oplus \overline{H_\lambda} \quad \text{où} \quad H_\lambda \subset \mathrm{T}_{\lambda,F}/\ell^n \mathrm{T}_{\lambda,F}, \tag{A.12}$$

et $\overline{H_\lambda}$ est le conjugué de H_λ.

Remarque. Étant donné que dans cette configuration on n'a plus deux copies de H_λ on doit effectuer les modifications suivantes afin d'obtenir notre invariant $\gamma(A)$. En effet au lieu de calculer le cardinal de H_λ on calculera celui de $\mathcal{H}_\lambda$, et au lieu de déterminer le degré de l'extension $K(H_\lambda)/K$ on déterminera celui de $K(\mathcal{H}_\lambda)/K$.

On conclut à présent les trois modifications énoncées au début de cet annexe. Voici un tableau qui récapitule toutes les modifications que doit subir le module de Tate et l'accouplement λ-adique afin de pouvoir déterminer l'invariant $\gamma(A)$.

	Module de Tate	Valeur de m_0
ℓ ramifié dans $\mathcal{O}_E$	$\mathrm{T}'_\ell := \ell^{m_0}\mathrm{T}_\ell(A)$	$m_0 = pgcd(m_\lambda, \lambda\vert\ell)$ et $\mathcal{O}_\lambda^* = \pi_\lambda^{-m_\lambda}\mathcal{O}_\lambda$ où π_λ est une uniformisante
$\ell\vert\deg(\phi)$	$\mathrm{T}'_\ell := \ell^{m_0}\mathrm{T}_\ell(A)$	$m_0 = \max\{m,\ \ell^m\vert\deg(\phi)\}$
ℓ tels que l'algèbre des quaternions soit non décomposée (type II, III)	$\mathrm{T}'_\lambda(A) := W_\lambda \cap \ell^{m_0}\mathrm{T}_\lambda(A)$	où $\ell^{m_0}\mathrm{T}_\lambda(A) \subset W_\lambda \oplus W_\lambda \subset \mathrm{T}_\lambda(A)$

Bibliographie

[Art57] E. Artin : *Geometric algebra.* Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers, 1957.

[BGK06] G. Banaszak, W. Gajda et P Krasoń : On the image of ℓ-adic Galois representations for abelian varieties of type I and II. *Documenta mathematica*, Extra volume Coates:55–95, 2006.

[BGK10] G. Banaszak, W. Gajda et P. Krasoń : On the image of Galois ℓ-adic representations for abelian varieties of type III. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 62(2):163–189, 2010.

[BGP] G. Böckle, W. Gajda et journal=Jour. fur die reine und angew. year=2015 Petersen, S.) : Independence of ℓ-adic representations of geometric Galois groups.

[BiLa04] C. Birkenhake et H. Lange : *Complex abelian varieties.* Springer, 2004.

[Bor74] M.V. Borovoĭ : On the Galois action on the rational cohomology classes of type (p, p) of abelian varieties. *Math. USSR Sb.*, 23(4):613–616, 1974.

[Bou06] N. Bourbaki : *Éléments de Mathématique. Groupes et algèbres de Lie : Chapitres 7 et 8.* Springer, 2nd édition, 2006.

[Cad15] A. Cadoret : Représentations galoisiennes ℓ-adiques et ℓ-indépendance, Notes du cours M2 AAG, Orsay, 2015.

[Cas78] J. W. S. Cassels : *Rational quadratic forms.* Academic press, 1978.

[CaTa12] A. Cadoret et A. Tamagawa : Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes. *Inventiones Math.*, 188:83–125, 2012.

[CF16] V. Cantoral-Farfan : A survey around the Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures for abelian varieties. *arXiv preprint arXiv :1602.08354*, 2016.

[Chi91] W. Chi : On the ℓ-adic representations attached to simple abelian varieties of type iv. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 44:71–78, 1991.

[Chi92] W. Chi : ℓ-adic and λ-adic representations associated to abelian varieties defined over number fields. *American Journal of Mathematics*, 114(2):315–353, 1992.

[DMOS82] P. Deligne, J.S. Milne, A. Ogus et K.-y Shih : *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 de *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1982.

[Fal83] G. Faltings : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73:349–366, 1983. translated to english [Finiteness Theorem for Abelian Varieties over Number Fields, in Arithmetic Geometry, chapter 2, pp 9–27, Springer, 1986].

[FaWü84] G. Faltings et G. Wüstholz : *Rational points*, volume 6 de *Aspects of Mathematics.* Vieweg+Teubner Verlag, 1984.

[Gee94] B. Geemen : *An introduction to the Hodge conjecture for abelian varieties*, pages 233–252. Lecture Notes in Math. Springer Berlin, 1994.

[Gor99] B. Gordon : *A survey of the Hodge conjecture for Abelian Varieties*, volume 10, pages 297–356. CRM monograph series, second édition, 1999.

[Hal11] C. Hall : An open-image theorem for a general class of abelian varieties with an appendix by emmanuel kowalski. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4):703–711, 2011.

[Har77] R. Hartshorne : *Algebraic Geomety.* Springer-Verlag New York, 1977.

[Haz85] F. Hazama : Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 31(3):487–520, 1985.

[HiRa10] M. Hindry et N. Ratazzi : Torsion dans un produit de courbes elliptiques. *J. Ramanujan Math. Soc*, 25:1–31, 2010.

[HiRa12] M. Hindry et N. Ratazzi : Points de torsion sur les variétés abéliennes de type GSp. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 11(01):27–65, janvier 2012.

[HiRa16] M. Hindry et N. Ratazzi : Torsion pour les variétés abéliennes de type I et II. *Algebra & Number Theory*, 10(9):1845–1891, novembre 2016.

[HiSi00] M. Hindry et J.H. Silverman : *Diophantine Geometry an Introduction.* Springer, 2000.

[Hum81] J. Humphreys : *Linear algebraic groups.* Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag Berlin, 1981.

[Ich91] T. Ichikawa : Algebraic groups associated with abelian varieties. *Math. Ann.*, 289(1):133–142, 1991.

[LaPi95] M. Larsen et R. Pink : Abelian varieties, ℓ-adic representations, and ℓ-independence. *Math. Ann.*, (3):561–579, 1995.

[Lef24] S. Lefschetz : *L'analysis situs et la géométrie algébrique.* Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Gauthier-Villars, 1924.

[Lom15a] D Lombardo : *Représentations galoisiennes et groupe de Mumford-Tate associé à une variété abélinne.* Thése de Doctorat de l'Université de Paris-Saclay, 2015.

[Lom15b] D. Lombardo : Roots of unity and torsion points on abelian varieties. *to appear in Ramanujan Journal*, 2015. arXiv :1507.00951v3.

[Lom16] D. Lombardo : On the ℓ-adic Galois representations attached to nonsimple abelian varieties. *Ann. Inst. Fourier*, 66(3):1217–1245, 2016.

[Mas86] D. Masser : Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986, 1986.

[Mil99] J.S. Milne : Lefschetz classes on abelian varieties. *Duke mathematical journal*, 96(3):639–670, 1999.

[Mil07] J. Milne : The Tate conjecture over finite fields, aim talk. http ://www.jmilne.org/math/articles/2007e.pdf, 2007.

[Mil20] J.S. Milne : Abelian varieties. http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AV.pdf, Version 2.0.

[MovdGon] B. Moonen et G. van der Geer : Abelian varieties. http ://www.math.ru.nl/personal/bmoonen/BookAV/Endoms.pdf, preliminary version.

[MoZa95] B.J.J. Moonen et Yu.G. Zarhin : Hodge classes and Tate classes on simple abelian fourfolds. *Duke Math. J.*, 77:553–581, 1995.

[MoZa99] B.J.J. Moonen et Yu.G. Zarhin : Hodge classes on abelian varieties of low dimension. *Math. Ann.*, 315:711–733, 1999.

[Mum66] D. Mumford : Families of abelian varieties. *In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics : Algebraic groups and discontinuous subgroups*, volume 9, pages 347–351. AMS, 1966.

[Mum74] D. Mumford : *Abelian varieties.* Oxford Univ. Press, 1974.

[Mur84] V.K. Murty : Exceptional Hodge classes on certain abelian varieties. *Math. Ann.*, 268:197–206, 1984.

[Noo95] R. Noot : Abelian varieties - Galois representation and properties of ordinary reduction. *Compositio Mathematica*, 97(1-2):161–171, 1995.

[Oes82] J. Oesterlé : Réduction modulo p^n des sous-ensembles analytiques fermés de $\mathbb{Z}_p^N$. *Inventiones mathematicae*, 66:325–341, 1982.

[Oor88] F. Oort : Endomorphism algebras of abelian varieties. *Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Masayoshi Nagata*, Part II:469–502, 1988.

[Pin98] R. Pink : ℓ-adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. *J. reine angew. Math*, 495, 1998.

[PS71] I.I. Piatetski-Shapiro : Interrelations between the Tate and Hodge conjectures for abelian varieties. *Math. USSR Sb.*, 14(4):615–624, 1971.

[Rat07] N. Ratazzi : Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type CM. *Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieur*, 40(6):951–983, 2007.

[Rib76] K. Ribet : Galois Action on Divison Points of Abelian Varieties with Real Multiplications. *Amer. J. Math.*, 98(3):751–804, 1976.

[Rib83] K. Ribet : Hodge classes on certain types of abelian varieties. *Amer. J. Math.*, 105(2):523–538, 1983.

[Ser81] J.-P. Serre : Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 54:123–201, 1981.

[Ser98] J.-P. Serre : *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*. Research Ntoes in Mathematics. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998.

[Ser03a] J.-P. Serre : *Lettres à Ken Ribet*, pages 56–68. Springer Collected Works in Mathematics. Springer London, London, 2003.

[Ser03b] J.-P. Serre : *Résumé des cours au Collège de France 1985-1986*. Springer Collected Works in Mathematics. Springer London, London, 2003.

[Ser13] J.-P. Serre : Un critère d'indépendance pour une famille de représentations ℓ-adiques. *Comment. Mathe. Helv*, 88(3):541–554, 2013.

[Tan83] S.G. Tankeev : Cycles on simple abelian varieties of prime dimension. *Math USSR Izv.*, 20:157–171, 1983.

[Tat65] J. Tate : Algebraic cycles and poles of zeta functions. *In Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 93–110. Harper & Row, New York, 1965.

[Vas08] A. Vasiu : Some cases of the Mumford-Tate conjecture and Shimura varieties. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(1):1–75, 2008.

[Win02] J.-P. Wintenberger : Démonstration d'une conjecture de Lang dans des cas particuliers. *J. Reine Angew. Math.*, 553:1–16, 2002.

[Yos70] A. Yoshioka : Structure du groupe des similitudes orthogonales. *Nagoya Math. J.*, 40:221–235, 1970.

[Zyw17] D. Zywina : Torsion bounds for a fixed abelian variety and varying number field. *preprint*, 2017.