La conjetura de Hodge para una variedad abeliana compleja

Victoria Cantoral Farfán

IMJ-PRG, París Francia

victoria.cantoral-farfan@imj-prg.fr

Semana del 15 al 19 de Diciembre 2014

II Reunión de Matemáticos Mexicanos en el Mundo

Introducción

La conjetura de Hodge sobre una variedad abeliana compleja X afirma que toda clase de Hodge es combinación $\mathbb{Q}$-lineal de clases algebraicas. Una herramienta indispensable para poder demostrar dicha conjetura en ciertos casos particulares es el grupo de Hodge Hg(X) de X. Definiremos las diferentes nociones necesarias para abordar esta conjetura, a saber: variedad abeliana, clases de Hodge y clases algebraicas.

Una conjetura análoga a esta última es la conjetura de Tate. En lugar de considerar una variedad abeliana sobre $\mathbb{C}$ la consideramos sobre un campo de números K. Asimismo el grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ nos permitirá demostrar la conjetura de Tate en ciertos casos particulares.

La conjetura de Hodge y la de Tate fueron enunciadas respectivamente en 1950 y en 1963. El objetivo de este póster será de explicar la conjetura de Hodge. Enunciaremos también algunos resultados que han sido encontrados en los últimos años.

Variedad abeliana compleja

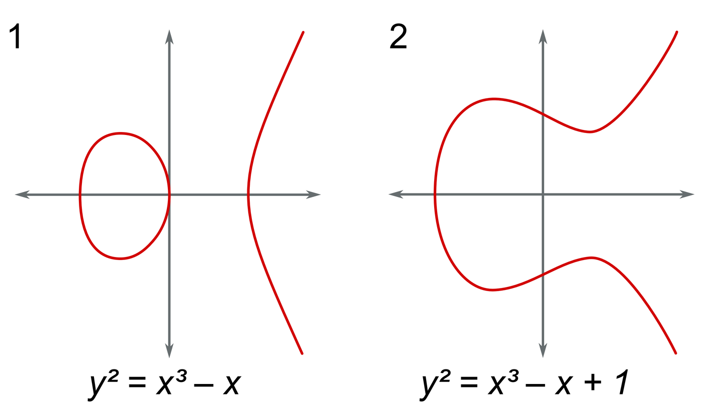
Sea $X \simeq \mathfrak{t}/\Lambda$ un toro complejo de dimensión g, donde $\mathfrak{t}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial ($\mathfrak{t} \simeq \mathbb{C}^g$) y Λ es un lattice de rango maximal $2g$.

Definición. *Una polarización del toro complejo X es una forma hermitiana definida positiva $H : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ tal que $L = Im(H) : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ tome sus valores enteros sobre Λ.*

Asimismo, una variedad abeliana compleja X es por definición un toro complejo que posee una polarización.

Dicha variedad abeliana X puede ser simple (no posee ninguna subvariedad abeliana no trivial) o ser isógena a $X_1 \times X_2$ donde $X_1 \subset X$ y $X_2 \subset X$ son dos subvariedades abelianas tales que $X_1 + X_2 = X$ y $X_1 \cap X_2$ es finito (teorema de reductibilidad de Poincaré).

Por ejemplo
- La jacobiana de una curva algebraica de genero g es una variedad abeliana de dimensión g.
- Una curva elíptica es una variedad abeliana de dimensión 1.



Clases algebraicas

Sea X una variedad abeliana compleja
- $Z^p(X)_{\mathbb{Q}}$ = el grupo de cociclos algebraicos a coeficientes racionales de codimensión p de X generado por las subvariedades de X de codimensión p.

Consideramos la aplicación siguiente:

$$cl : Z^p(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2p}(X, \mathbb{Q})$$

Por definición,
- $C^p(X)$ = el grupo de clases algebraicas a coeficientes racionales de codimensión p de X

$$C^p(X) = cl(Z^p(X)_{\mathbb{Q}}) \subset H^{2p}(X, \mathbb{Q})$$

Bibliografía

[1] C. Birkenhake y H. Lange, *Complex abelian varieties*. Springer, 2004.

[2] M. Hindry y J.H. Silverman, *Diophantine Geometry an Introduction*. Springer, 2000.

[3] B.J.J. Moonen y Yu.G. Zarhin, *Hodge classes on abelian varieties of low dimension*. Math. Ann., 315 1999, 711-733.

Conjetura de Hodge '50

Sea X una variedad abeliana compleja entonces toda clase de Hodge se escribe como combinación $\mathbb{Q}$-lineal de clases algebraicas.

Clases y grupo de Hodge

- Sea $V = H_1(X, \mathbb{Q})$ el primer grupo de homología y $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \subset GL(V)$ et grupo de homotecias.
- Sea $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$ la restricción de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$.

Consideramos el morfismo siguiente:

$$h : \mathbb{S} \to GL(V)_{\mathbb{R}}$$

Definición. *El grupo de Hodge* Hg(X) *de X es el más pequeño subgrupo algebraico de $GL(V)$ definido sobre $\mathbb{Q}$ tal que $h_{|U^1}$ se factoriza a través* $\mathrm{Hg(X)} \otimes \mathbb{R}$ *donde $U^1 \subset \mathbb{S}$ y $U^1(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^*, z\bar{z} = 1\}$.*

A toda polarización de la variedad abeliana compleja X le podemos asociar una $\mathbb{Q}$-forma simpléctica $\phi : V \times V \to \mathbb{Q}$ tal que:

$$\mathrm{Hg(X)} \subseteq \mathrm{Sp_D(V,}\phi) \subseteq \mathrm{Sp(V,}\phi)$$

donde $D = \mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ y $\mathrm{Sp_D(V,}\phi)$ es el centralizador de D en $\mathrm{Sp(V,}\phi)$.

El grupo de cohomología $H^n(X, \mathbb{Q})$ posee una estructura de Hodge de peso n, obtenemos así la descomposición de Hodge siguiente:

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

donde $H^{q,p}$ es el conjugado complejo de $H^{p,q}$

Definición. *Sea $p \in [\![0, dim(X)]\!]$, el grupo de clases de Hodge de codimensión p está definido por*

$$B^p(X) := H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p} \subset H^{2p}(X, \mathbb{C})$$

Obtenemos entonces el anillo de Hodge como la $\mathbb{Q}$-álgebra graduada definida por

$$B^\bullet(X) = \oplus_p B^p(X)$$

Las clases de Hodge pueden ser vistas como los invariantes de la acción de Hg(X) sobre el anillo de cohomología $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ como lo muestra el teorema siguiente:

Teorema. *Para todo p tenemos la igualdad siguiente:*

$$B^p(X) = H^{2p}(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg(X)}}$$

Clases de Hodge y conjetura

- El teorema de las clases $(1, 1)$ de Lefschetz afirma que las clases de Hodge en $B^1(X) = H^2(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg(X)}} \subset H^2(X, \mathbb{C})$ son multiples racionales de clases algebraicas de divisores.
- Denotamos $D^\bullet(X) \subset B^\bullet(X)$ la $\mathbb{Q}$-subálgebra generada por las clases algebraicas de divisores.
- Las clases de Hodge que se encuentran en $D^\bullet(X)$ son las clases de Hodge **descompuestas**.
- Los elementos de $B^\bullet(X) - D^\bullet(X)$ son las clases de Hodge **excepcionales**.

Sea $p \in [\![0, dim(X)]\!]$, obtenemos siempre las siguientes inclusiones:

$$D^p(X) \subseteq C^p(X) \subseteq B^p(X)$$

La conjetura de Hodge afirma que

$$C^p(X) = B^p(X)$$

- No sabemos demostrar aún que las clases excepcionales son algebraicas.
- El teorema de las clases (1,1) de Lefschetz y la dualidad de Poincaré muestran que la conjetura de Hodge es cierta para toda variedad abeliana de dimensión inferior o igual a 3.

Resultados

Consideramos (C) la condición siguiente:

$$B^\bullet(X^n) = D^\bullet(X^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Teorema (Murty y Hazama '84)**.** *Sea X una variedad abeliana compleja*

$$(C) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X \text{ no contiene factores} \\ \text{de tipo III en la clasificación} \\ \text{de Albert} \\ y \\ \mathrm{Hg(X)} = \mathrm{Sp_D(V,}\phi) \end{cases}$$

Teorema (Tankeev '83)**.** *Sea X una variedad abeliana compleja simple tal que $g = dimX$ sea un número primo. Entonces* $\mathrm{Hg(X)} = \mathrm{Sp_D(V,}\phi)$ *y la condición (C) es verificada.*

Corolario (Imai '76)**.** *Sean $X_1, ..., X_n$ curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$ no isógenas dos a dos. Sea $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, entonces* $\mathrm{Hg(X)} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hg(X_i)}$. *En particular X satisface la condición (C).*

Teorema (Moonen y Zarhin ' 99)**.** *Toda variedad abeliana compleja, no forzosamente simple, de dimensión inferior o igual a 5 verifica la conjetura de Hodge, salvo ciertas excepciones.*